tuanthuybook@gmail.com

VÕ ĐẠI MAU

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LƯỢNG GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM

ĐT: 0937277023

tuanthuybook@gmail.com

LỜI NÓI ĐẦU

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Đối với các học sinh cấp III nói chung – và nhất là các bạn đang trong kỳ ôn luyện chuẩn bị thi vào các trường Đại học – Cao đẳng ... thì Lượng giác là một trong những phân môn toán học khó. Trong chương trình cải cách giáo dục cấp III, Lượng giác có vai trò khá quan trọng, được đề cập khá nhiều trong bộ đề tuyển sinh Đại học mới và là một trong ba phần bắt buộc.

Nhằm giúp các em học sinh và các bạn yêu toán khác chuẩn bị tốt cho các kì thi cuối cấp và Đại học, chúng tôi đã cố gắng sưu tầm, biên soạn phân môn toán lượng giác. Sách chủ yếu hướng dẫn phương pháp để các bạn có thể tự học, tự rèn tốt hơn trong sự đa dạng phương pháp của nó.

Cùng với cuốn ***Phân loại các bài toán lượng giác, Phương pháp giải****, là cuốn có tính chuyên đề:* ***Phương trình và bất phương trình lượng giác*** *– Sách giúp các bạn phân loại các dạng toán cùng các phương pháp giải đặc biệt để dễ nhớ, dễ thực hành.*

Do tính đa dạng của phân môn, nên dù có nhiều cố gắng trong biên soạn, chúng tôi cũng không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong các em học sinh, các bạn yêu toán, các đồng nghiệp góp ý để phục vụ bạn đọc tốt hơn.

Chúc các em học giỏi và đạt kết quả tốt trong kì thi tới.

Tác giả

VÕ ĐẠI MAU

ĐT: 0937277023

MỘT SỐ CHÚ Ý QUAN TRỌNG CẦN GHI NHỚ TRƯỚC KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

VẤN ĐỀ I

1. Chú ý 1: Về phương trình có chứa ẩn ở mẫu số.

NHỚ BUỘC ĐIỀU KIỆN MẪU SỐ KHÁC 0

a. Nếu phương trình có ẩn là tgx hoặc có chứa cosx ở mẫu số thì ta phải buộc điều kiện:

$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

(hoặc $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$)

b. Nếu phương trình có ẩn là cotgx hoặc có chứa sinx ở mẫu số thì ta phải buộc điều kiện:

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi,\ k \in Z$

2. Chú ý 2: Về phương trình vô tỉ.

Nếu phương trình có chứa căn thức bậc chẵn thì nhớ buộc điều kiện biểu thức nằm trong căn thức không âm.

3. Chú ý 3: Về việc dùng ẩn số phụ.

Có một số phương trình ta phải dùng ẩn số phụ thì mới giải được hoặc thuận tiện cho quá trình giải.

Nhớ buộc điều kiện cho ẩn số phụ, nghĩa là tìm miền xác định D của các biểu thức có mặt trong phương trình theo đối số mới.

Thí dụ:

– Khi đặt t = sinx hoặc t = cosx thì nhớ ghi kèm theo là $t \in [-1,1]$

– Khi đặt $t = |\sin x|$ hoặc $t = |\cos x|$ hoặc $t = \sin^2 x$, $t = \cos^2 x$ thì $t \in [0,1]$

– Khi đặt $t = \cos x \pm \sin x$ mà $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{2}\right]$

– Khi đặt t = acosx + bsinx thì $t \in \left[-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}\right]$

– Khi đặt t = tgx + cotgx thì $|t| \geq 2$

– Khi đặt $u = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ thì sao?

Ta có $\sin x \in [-1,1] \Rightarrow \sin^2 x \in [0;1] \Rightarrow 2 - \sin^2 x \geq 1$

mà $\sin x \geq -1$

Do đó: $u = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \geq 0$ (1)

Mặt khác: $uu^2 \leq \left[\sin^2 x + (\sqrt{2 - \sin^2 x})^2\right](1^2 + 1^2) = 4 \Rightarrow |u| \leq 2$ (2)

từ (1) và (2), ta có: $0 \leq u \leq 2$

4. Chú ý 4: tìm giao của các tập nghiệm.

Giả sử khi giải một phương trình lượng giác nào đó mà quá trình giải cuối cùng dẫn đến việc phải tìm giao của 2 tập nghiệm E_1, E_2.

– Nếu $E_1 \cap E_2 = E$ thì E là tập nghiệm phải tìm

– Nếu $E_1 \subset E_2$ thì $E_1 \cap E_2 = E_1 \Rightarrow E = E_1$

– Nếu $E_2 \subset E_1$ thì $E_1 \cap E_2 = E_2 \Rightarrow E = E_2$

– Nếu $E_1 \cap E_2 = \varnothing$: phương trình vô nghiệm

ví dụ: a/ Giải phương trình

$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$ (1)

Quá trình giải: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\dfrac{2\pi}{3} \quad (E_1) \\ x = \ell\dfrac{\pi}{2} \quad (E_2) \end{cases}$ (*) với $k, \ell \in Z$

có mấy cách để xác định nghiệm của hệ (*)

– Cách 1: Dùng phương pháp liệt kê các phần tử của các tập nghiệm E_1 và E_2. Trên cơ sở đó, ta xác định tập $E = E_1 \cap E_2$. Ta có

$$E_1 = \left\{..., 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, 4\pi, \frac{14\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, 6\pi...\right\}$$

$$E_2 = \left\{..., 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi...\right\}$$

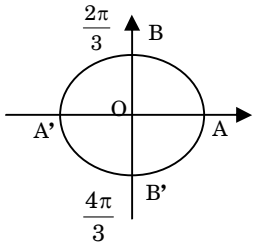
$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 = \{..., 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$$

Do đó nghiệm của phương trình (1) là:

$x = m2\pi,\ m \in Z$

– Cách 2: Dùng đường tròn lượng giác.

– Tìm trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của những cung thuộc tập E_1 và thuộc E_2, chọn lấy những điểm ngọn chung. Suy ra tập nghiệm E của phương trình đã cho.



– Cách 3: Giả sử, ta có hệ (2) $\begin{cases}\cos 3x = 1\\ \sin 2x = 0\end{cases}$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}-3\cos x + 4\cos^3 x = 1\\ 2\sin x\cos x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0\\ \sin x = 0 \ \vee \ \cos x = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3 x - \cos x - 1 = 0 \quad (a)\\ \cos x = 0;\ \cos x = \pm 1 \quad (b)\end{cases}$$

Lần lượt thay cosx = 0, cosx = 1, cosx = –1 vào (a), ta thấy chỉ có giá trị cosx = 1 thỏa.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in Z$

Vậy nghiệm của (1) là $x = k2\pi$, $k \in Z$ cách này hay hơn cả nhưng đòi hỏi các em học sinh phải thông minh, nhạy bén.

TD: b/ Giải phương trình

$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x \quad (1)$

dẫn đến hệ $\begin{cases}\sin x = \pm 1\\ \sin 3x = -1\end{cases} \quad (2)$

ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \pm 1\\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \pm 1\\ 4\sin^3 x - 3\sin x - 1 = 0\end{cases}$

Rõ ràng sinx = 1 là nghiệm của hệ

Do đó nghiệm của (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

5. Chú ý 5: Tìm hợp của các tập nghiệm.

Giả sử phương trình đã cho có 2 tập nghiệm là E_1 và E_2. Ta phải tìm $E = E_1 \cup E_2$

– Nếu $E_1 \subset E_2$ thì $E_1 \cup E_2 = E_2 \Rightarrow E = E_2$

– Nếu $E_2 \subset E_1$ thì $E_1 \cup E_2 = E_1 \Rightarrow E = E_1$

– Nếu $E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow E = E_1 \cup E_2$

– Nếu $E_1 \cap E_2 = E' \Rightarrow E = E_1 \cup (E_2 \setminus E')$

ví dụ: a/ Quá trình giải phương trình

$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$ (1)

dẫn đến (1) có 2 tập nghiệm

$E_1 : x_1 = k\dfrac{\pi}{5}$; $E_2 : x_2 = n.\dfrac{\pi}{2}$ với $k, n \in Z$

Nếu chọn k= 5m và n = 2m thì

$x_1 = x_2 = m\pi$, $m \in z$

Như vậy E_1 và E_2 có một phần chung là

$E' = \{x \in E_2 / x = m\pi, m \in Z\}$

Do đó nếu ta giữ lại E_1 thì trong tập E_2 phải loại bỏ tập E' (vì đã kể trong E_1 rồi). Ta có:

$E_2 \setminus E' = \{x = n\ \dfrac{\pi}{2} / n \neq 2m\} = \{x = (2\ell + 1)\dfrac{\pi}{2}, \ell \in Z\}$

Vậy nghiệm của (1) sẽ là:

$$\left[\begin{array}{l} x = k.\dfrac{\pi}{5} \\ x = (2\ell + 1)\dfrac{\pi}{2} \text{ với } k, \ell \in Z \end{array}\right.$$

ví dụ: b/ Giải phương trình

$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$

Phương trình có 3 tập nghiệm

$x_1 = k\pi$; $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \ell\pi$; $x_3 = \dfrac{\pi}{3} + m\pi$ với $k, \ell, m \in Z$

Có thể viết gọn lại: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n.\dfrac{\pi}{2} (n, k \in Z) \end{array}\right.$

ví dụ: c/ Giải phương trình: $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ (1)

Phương trình có 2 tập nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi & k, \ell \in Z \quad (E_1) \\ x_2 = \dfrac{\pi}{10} + \ell\dfrac{\pi}{5} & (E_2) \end{cases}$$

Nếu ta chọn $\ell = 5k + 2$ thì

$$x_2 = \frac{\pi}{10} + (5k+2)\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + k\pi + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi = x_1 \Rightarrow E_1 \subset E_2$$

Do đó nghiệm của (1) là: $x = \dfrac{\pi}{10} + \ell\dfrac{\pi}{5} \qquad \ell \in Z$

Ghi nhớ cách dùng đường tròn lượng giác

– Ghi những điểm ngọn của các cung thuộc tập E_1 bằng những dấu • (tròn) và của các cung thuộc tập E_2 bằng những dấu □ (vuông).

– Điểm ngọn nào có dấu vừa • vừa □ thì thuộc phần giao của 2 tập nghiệm E_1 và E_2

– Tất cả mọi điểm đều thuộc phần hợp, trong đó những điểm có 2 kí hiệu □ chỉ ứng với 1 nghiệm nên chỉ kể 1 lần. Do đó khi đã lấy toàn tập E_1 thì khi lấy tập E_2 phải phân loại bỏ phần chung trong E_2.

ví dụ: d/ Giả sử ta có:

$$x_1 = k.\frac{\pi}{4} \quad (E_1); \qquad x_2 = \ell.\frac{\pi}{2} \text{ với } k, \ell \in Z \quad (E_2)$$

Trên đường tròn lượng giác: Tập nghiệm E_1 tương ứng 8 điểm ngọn và E_2 có 4 điểm ngọn (các em tự vẽ hình) $\Rightarrow$ có 4 điểm ngọn chung ứng với E_2. Vậy nghiệm phải tìm là $x = l.\dfrac{\pi}{2}$

(Rõ ràng là $E_2 \subset E_1$ nên $E_1 \cap E_2 = E_2$)

Giả sử ta phải tìm $\begin{cases} x_1 = k.\dfrac{\pi}{5} & (E_1) \\ x_2 = \ell.\dfrac{\pi}{2} \text{ với } k, \ell \in Z & (E_2) \end{cases}$

Trên đường tròn lượng giác:

+ E_1 có 10 điểm ngọn tương ứng

+ E_2 có 4 điểm. Trong đó:

E_2 có 2 điểm chung với E_1 ứng với các cung $x = m\pi$, $m \in Z$

Do đó tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$E = E_1 \cup E_2 = E_1 \cup [E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)]$

hay $\left[\begin{array}{l} x_1 = k.\dfrac{\pi}{5} \\ x_2 = (2m+1)\dfrac{\pi}{2} \text{ với } k, m \in Z \end{array}\right.$

VẤN ĐỀ: CÁC KIỂU, DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Điều làm cho học sinh băn khoăn là làm sao để giải được bất kì một phương trình lượng giác nào?

Đại để ta có thể phân loại các phương trình lượng giác thành mấy loại sau:

(1) Nếu phương trình có các số hạng cos2x và sinx:

thay $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ta được một phương trình bậc hai theo sinx.

(2) Nếu phương trình có các số hạng cos2x và cosx:

Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, ta được một phương trình bậc hai theo cosx.

(3) Nếu phương trình có các số hạng tg^2x và $\dfrac{1}{\cos^2 x}$:

Thay $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + tg^2 x$, ta được một phương trình bậc hai theo tgx.

(4) Nếu phương trình có các số hạng $cotg^2x$ và $\dfrac{1}{\sin^2 x}$:

Thay $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x$, ta được một phương trình bậc hai theo cotgx.

(5) Nếu phương trình có các số hạng sin3x và cosx:

Thay $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, ta được một phương trình bậc 3 theo sinx.

(6) Nếu phương trình có các số hạng cos3x và cosx:

Thay $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$, ta được một phương trình bậc 3 theo cosx.

(7) Biến đổi phương trình đã cho thành dạng phương trình cổ điển.

$A\cos x + B\sin x = C$

(8) Dạng toàn phương hay bậc 2 đối với sinx và cosx:

$A\sin^2x + B\sin x\cos x + C\cos^2x + D = 0$

(9) Dạng đối xứng đối với sinx và cosx:

$A(\cos x + \sin x) + B\sin x\cos x + C = 0$

(10) Dạng đối xứng đối với tgx và cotgx:

$A(tg^2x + cotg^2x) + B(tgx + cotgx) + C = 0$

(11) Đưa về dạng phương trình tích số.

(12) Phương trình dùng bất đẳng thức để giải

(13) Phương trình dạng

$A^{2n} + B^{2m} + C^{2k} = 0$

Với n, m, k $\in Z_+$

(14) Phương trình vô tỉ

(15) Phương trình chứa giá trị tuyệt đối.

Phương trình kèm theo một điều kiện.

(16) Phương trình mũ.

(17) Phương trình lôgarit.

Mỗi phương trình có một phương pháp đặc trưng để giải. Ngoài ra còn có những phương pháp:

– Dùng giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất để giải.

– Dùng đồng nhất thức.

– Dùng ẩn số phụ hoặc dùng góc phụ.

– Dùng đồ thị v.v...

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG ẨN SỐ PHỤ

Trong quá trình giải một phương trình nói chung và phương trình lượng giác nói riêng, có nhiều lúc để cho thuận tiện, ta phải đổi ẩn số. Ẩn số mới là một biểu thức, một hàm số theo ẩn số ban đầu. Khi đổi ẩn số như vậy, ta nhớ buộc điều kiện cho ẩn số mới đó.

Thí dụ như khi giải phương trình bậc hai theo sinx hoặc cosx, ta đặt

$t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì $-1 \le t \le 1$

Nếu đặt $t = |\sin x|$ hoặc $t = |\cos x|$ thì sao?

Gặp phương trình: $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

ta đặt t = sinx ± cosx thì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Nhưng nếu bản thân x phải chịu một điều kiện nào đó thì t cũng thay đổi theo. Thí dụ nếu $-\frac{\pi}{6} + k2\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in Z$ thì lúc đó t sẽ phải thuộc đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right]$ chớ $t \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(Các bạn xem chương phương trình vô tỉ, bài tập 78)

Nếu ta đặt t = acosx + bsinx thì sao?

Theo Bunhiacốpski, ta có:

$t^2 = (a\cos x + b\sin x)^2 \le (a^2 + b^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} < t < \sqrt{a^2 + b^2}$

Nếu ta đặt t = tgx hoặc t = cotgx thì $t \in (-\infty, +\infty)$ chỉ cần nhớ $x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}$ với t = tgx và $x \ne k\pi$ với t = cotgx, $k \in Z$

Giả sử ta đặt t = tgx + cotgx thì sao?

Các bạn cũng biết rằng

$$tgx + \cot gx = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Do $-1 \le \sin 2x \le 1$ nên $t \le -2 \vee t \ge 2$

Nói cách khác $|t| \ge 2$. Với $x \ne k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$

Hoặc: Cũng có thể dựa vào tính chất : tgx và cotgx là 2 đại lượng nghịch đảo nhau do đó: $tgx + \cot gx \le -2 \vee tgx + \cot gx \ge 2 \Rightarrow |t| \ge 2$

Đề 1

Giải phương trình: $3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$ (1)

(Theo Bộ Đề thi)

Giải

Ta đặt t = 3cosx + 4sinx $\Rightarrow t \in [-5, 5]$ (*)

Phương trình (1) trở thành $t + \frac{6}{t+1} = 6$, như vậy $t \ne -1$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 5$, thỏa các điều kiện trên.

Do đó ta có: $3\cos x + 4\sin x = 0 \vee 3\cos x + 4\sin x = 5$

a/ Giải phương trình $3\cos x + 4\sin x = 0$ (2)

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 0$

Chọn cung α sao cho $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, ta có

$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in z \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi$

b/ Giải phương trình $3\cos x + 4\sin x = 5$ (3)

ta có: $(3) \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = \ell.2\pi,\ \ell \in Z \Leftrightarrow x = \alpha + \ell.2\pi$

Vậy phương trình cho có 2 họ nghiệm

$$x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \alpha + \ell.2\pi \text{ với } k, \ell \in z$$

Đề 2: Giải phương trình: $\sqrt{tgx - \cot gx} - \sqrt{1 - \cot gx} = 1 - \cot gx$ (1)

Giải

Điều kiện : $\bullet \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$ (2)

- $\cot gx \leq 1$ (3)
- $\cot gx \leq tgx$ (4)

Đặt $u = \sqrt{tgx - \cot gx}$; $v = \sqrt{1 - \cot gx}$, ta có hệ

$$\begin{cases} u - v = 1 - \cot gx & (5) \\ u^2 - v^2 = tgx - 1 & (6) \\ u, v \geq 0 & (7) \end{cases}$$

Ta có: $(6) \Leftrightarrow (u-v)(u+v) = \frac{1}{\cot gx} - 1 = \frac{1 - \cot gx}{\cot gx}$

Thay $u - v = 1 - \cot gx$ ta có: $(1 - \cot gx)(u + v) = \frac{1 - \cot gx}{\cot gx}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cot gx = 0 & (a) \\ u + v = \frac{1}{\cot gx} = tgx & (b) \end{cases}$$

Ta có: (a) $\Leftrightarrow \cot gx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

(b) $\Rightarrow u + v = tgx$ (8) mà $u - v = 1 - \cot gx$

Ta suy ra: $2u = tgx - \cot gx + 1 = u^2 + 1 \Leftrightarrow u^2 - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1$

Do đó: $tgx - \cot gx = 1 \Leftrightarrow tgx - \frac{1}{tgx} = 1 \Leftrightarrow tg^2x - tgx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow tgx = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $tgx = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Từ (7) $\Rightarrow u + v \geq 0$, (8) $\Rightarrow tgx \geq 0$ ta chọn

$tgx = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = arctg\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \ell\pi, \ell \in Z$

Với $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ hoặc

$x = arctg\frac{1+\sqrt{5}}{2} + k\pi, \ell \in z$ các điều kiện trên đều thỏa

Vậy phương trình (1) có 2 họ nghiệm là:

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = arctg\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \ell\pi$ với k, $\ell \in Z$

Đề 3: **Tìm m để hệ sau có nghiệm**

$$\begin{cases} \mathbf{sinx + siny = \frac{1}{2}} \\ \mathbf{cos2x + cos2y = m} \quad (2) \end{cases} \qquad \mathbf{(I)}$$

(Theo Bộ Đề thi Tuyển sinh mới)

Giải

• Ta biến đổi vế trái của (2). Ta có:

(2) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = m \Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 y = m$

Do đó hệ (I) tương đương với hệ

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ 2 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{2-m}{2} \end{cases}$$

Ta dùng ẩn số phụ. Đặt

$u = \sin x$, $v = \sin y$ với $-1 \leq u, v \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2} \\ u^2+v^2=\dfrac{2-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2} \\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{2-m}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}-2uv=\dfrac{2-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2} \\ uv=\dfrac{2m-3}{8} \end{cases}$$

Do đó u và v là 2 nghiệm của phương trình

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2m-3}{8}=0 \Leftrightarrow 8x^2-4x+2m-3=0 \quad (3)$$

$\Delta' = 4 - 8(2m-3) = -16m + 28$

Điều kiện (3) có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16m + 28 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 16m \leq 28 \Leftrightarrow m \leq \frac{28}{16}=\frac{7}{4} \quad (*)$$

Với điều kiện thì (*) thì (3) có 2 nghiệm x_1, x_2

Đặt $f(x) = 8x^2 - 4x + 2m - 3$

Ta hãy so sánh -1 và 1 với 2 nghiệm của $f(x)$

$f(-1) = 8 + 4 + 2m - 3 = 2m + 9$

$f(1) = 8 - 4 + 2m - 3 = 2m + 1$

Để cho hệ (I) có nghiệm thì (3) phải có 2 nghiệm $\in [-1,1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8f(-1) \geq 0 \\ 8f(1) \geq 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+9 \geq 0 \\ 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{S}{2} \in (-1,1) \text{ thỏa} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) có nghiệm của (3), ta có: $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}$

Đề 4: Giải phương trình: $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ (1)

Giải

- Đặt $y = 81^{\sin^2 x}, 81 \geq y > 0 \Rightarrow 81^{\cos^2 x} = 81^{1-\sin^2 x} = \dfrac{81}{y}$

Ta có: (1) $\Rightarrow y+\frac{81}{y}-30=0 \Leftrightarrow y^2-30y+81=0 \Leftrightarrow y=3 \vee y=27$

a/ Giải phương trình y= 3 $\Leftrightarrow 81^{\sin^2 x}=3 \Leftrightarrow 3^{4\sin^2 x}=3$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in Z$

b/ Giải phương trình y= 27 $\Leftrightarrow 81^{\sin^2 x}=27 \Leftrightarrow 3^{4\sin^2 x}=3^3$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x=3 \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+m\pi, m\in Z$

Vậy nghiệm của (1) là $x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$

hoặc $x=\pm\frac{\pi}{3}+m\pi$ với $n,m\in Z$

Đề 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sin^5(-2x)-(3-\sqrt{2})tg5y=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} & (1)\\ tg^2 5y+(3-\sqrt{2})\sin(-2x)=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} & (2)\end{cases} \quad (I)$$

Giải

• Dùng phương pháp ẩn số phụ

Đặt u = sin(−2x), v = tg5y với $y\neq(2k+1)\frac{\pi}{10}$, $k\in Z$

Và $-1\le u\le 1$

Ta có: $\begin{cases}u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} & (3)\\ v^2+(3-\sqrt{2})u=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} & (4)\end{cases}$ (II)

Giữ nguyên (3), thay (4) bằng phương trình có được từ việc trừ (3) cho (4) vế theo vế:

$u^2-v^2-(3-\sqrt{2})(u+v)=0 \Leftrightarrow (u+v)(u-v-3+\sqrt{2})=0$

Ta có: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases}u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} & (3)\\ (u+v)(u-v-3+\sqrt{2})=0 & (5)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \\ u+v=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \\ u-v-3+\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a)\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \\ u+v=0 \end{cases} \text{ hoặc } (b)\begin{cases} u^2-(3-\sqrt{2})v=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \\ v=u-3+\sqrt{2} \end{cases}$$

+ Giải hệ (a):

Thay $v = -u$ vào (3) ta có: $u^2+(3-\sqrt{2})u-\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}=0$ (6)

Phương trình này có 2 nghiệm là: $u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}$

Do đó hệ (a) có 2 cặp nghiệm:

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_2=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2} \\ v_2=\dfrac{6-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

+ Giải hệ (b): Thay $v= u-3+\sqrt{2}$ vào (3)

ta có:

$$u^2-(3-\sqrt{2})(u-3+\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow u^2-(3-\sqrt{2})u+\frac{23-15\sqrt{2}}{2}=0 \ (7)$$

$$\Delta=(3-\sqrt{2})^2-2(23-15\sqrt{2})=24\sqrt{2}-35<0$$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (7) vô nghiệm

Do đó chỉ có 2 khả năng sau:

$$\begin{cases} \sin(-2x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ tg5y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin(-2x)=\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2} \\ tg5y=\dfrac{6-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vì $\dfrac{-6+\sqrt{2}}{2}<-1$ nên khả năng thứ hai bị loại

Ta có:

- $\sin(-2x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -2x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+n\pi \Leftrightarrow x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8}-n\dfrac{\pi}{2}$, $n\in Z$

• $\text{tg}5y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5y = -\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + m\pi, m \in Z$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + m.\frac{\pi}{5}$

Vậy nghiệm của hệ (I) đã cho là:

$$\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} - n.\frac{\pi}{2} \\ y = -\frac{1}{5}\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + m.\frac{\pi}{5} \end{cases} \text{ với } n, m \in Z$$

Đề 6: Tìm mọi cặp số (x,y) thỏa hệ

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)[1+\cos(xy)\sin(xy)] = (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + \cos(2xy) \quad (1) \\ x^2y^2 - y^2 = 1 \quad (2) \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \le 6 \quad (3) \end{cases}$$

Giải

• Đặt t = xy, phương trình (1) trở thành:

$(\sqrt{3}+1)(1+\cos t \sin t) = (\sqrt{3}+1)\sin^2 t + \cos 2t$

Tiếp theo, ta có thể thay

$\cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t;\ \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

Ta sẽ được một phương trình cổ điển hoặc thay $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ và chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 t$ với nhận xét rằng $\cos t \neq 0$ ta sẽ được một phương trình bậc 2 theo tgt:

$\text{tg}^2 t + (\sqrt{3}+1)\text{tg}t + \sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \text{tg}t = -1 \vee \text{tg}t = -\sqrt{3} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \vee\ t = -\frac{\pi}{3} + n\pi \ (*)$ với k, n $\in Z$

Gọi t_0 là một trong những giá trị của (*). Ta xét hệ

$$\begin{cases} xy = t_0 \\ x^2y^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1+t_0^2} \\ x = \pm\frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}} \end{cases} \quad (4)$$

Ứng với mỗi giá trị $t_0 \in (*)$, ta có 2 cặp giá trị (x,y), cùng lấy dấu (+) hoặc cùng lấy dấu (–)

Thay cặp số (x,y) vào (3), ta có: $\frac{1+t_0^2}{t_0^2}+1+t_0^2\le 6$

$$\Leftrightarrow \frac{t_0^4-4t_0^2+1}{t_0^2}\le 0 \Leftrightarrow t_0^4-4t_0^2+1\le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{3}\le |t_0|\le 2+\sqrt{3} \quad (5)$$

• Các giá trị $t_1=-\frac{\pi}{4}$ (ứng với k= 0) và $t_2=-\frac{\pi}{3}$ (ứng với n = 0) của (*) thỏa (5)

• Xét trường hợp $k\ne 0$ và $n\ne 0$:

Ta có: $\left|-\frac{\pi}{4}+k\pi\right|\ge |k|\pi-\frac{\pi}{4}\ge \pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}>\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$

và $\left|-\frac{\pi}{3}+n\pi\right|\ge |n|\pi-\frac{\pi}{3}\ge \pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Như vậy: nếu $k\ne 0$ và $n\ne 0$ thì (*) không thỏa (5)

Do đó chỉ có 2 giá trị $t_1=-\frac{\pi}{4}$, $t_2=-\frac{\pi}{3}$ thích hợp.

Vậy các cặp số (x,y) phải tìm là:

$$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}},\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right),\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}},\frac{-\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right),\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\frac{-\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Phương pháp đồ thị là phương pháp giải toán tương đối thông dụng. Trong một số trường hợp, chúng ta có thể sử dụng phương pháp đồ thị để giải và biện luận các phương trình hoặc bất phương trình lượng giác

Đề 7

Định mọi giá trị của tham số a để phương trình sau có nghiệm: $\sin^6x+\cos^6x=a|\sin 2x|$ (1)

Giải

Biến đổi vế trái: $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

Do đó ta có: $(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a|\sin 2x|$

Đặt $t = |\sin 2x|$ với $0 \le t \le 1$, ta có: $1 - \frac{3}{4}t^2 = at$

$t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình suy ra: $\frac{4 - 3t^2}{4t} = a$ (2)

(2) có thể xem là phương trình độ điểm chung của đồ thị

$(C): y = \frac{-3t^2 + 4}{4t}$

và đường thẳng (D): y= a, song song với trục hoành

Để (1) có nghiệm thì chỉ cần (I) cắt (C) trên nửa khoảng (0,1]

Ta có $y = \frac{-3t^2 + 4}{4t} = -\frac{3}{4}t + \frac{1}{t} \Rightarrow y' = -\frac{3}{4} - \frac{1}{t^2} < 0 \; \forall t \ne 0$: Hàm giảm

Bảng biến thiên:

t	0		1
y'	‖	–	
y	‖ +∞	↘	1/4

Bài toán có lời giải khi và chỉ khi $a \ge \frac{1}{4}$

Đề 8

Cho phương trình: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m\,tg2x$ (1)

a. Giải (1) khi m= $\frac{1}{4}$

b. Định mọi giá trị của m để (1) có nghiệm

Giải

• Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x}{\cos 2x} = \frac{m \sin 2x}{\cos 2x}$ (1')

Điều kiện: $\cos 2x \ne 0 \Leftrightarrow \sin 2x \ne \pm 1$

Ta có: $(1') \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m\sin 2x$

Đặt $t = \sin 2x$, với $-1 < t < 1$, ta có: $4 - 3t^2 = 4mt$

Phương trình không thể có nghiệm $t = 0$. Do đó ta có: $\frac{-3t^2+4}{4t} = m$ (2)

(2) có thể xem là phương trình hoành độ điểm chung của đồ thị (C) $y = \frac{-3t^2+4}{4t}$ và đường thẳng (D): $y = m$, song song với trục hoành

Ta trở lại bài toán trên. Điểm khác nhau của 2 bài toán này là:

– Trong bài trên, ta đặt $t = |\sin 2x|$, với $t \in (0,1]$

– Trong bài này, ta đặt $t = \sin 2x$ với $t \in (-1,1)$

Do đó bảng biến thiên sẽ khác và dĩ nhiên giá trị của tham số m cũng sẽ khác đi

t	-1		0		1
y'		$-$		$-$	
y	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$

Vì $t \neq \pm 1$ nên để (2) có nghiệm, ta phải có: $m < -\frac{1}{4} \vee m > \frac{1}{4}$

a. Khi $m = \frac{1}{4}$: (1) vô nghiệm

b. Để (1) có nghiệm thì: $m < -\frac{1}{4} \vee m > \frac{1}{4}$

Đề 9: Cho phương trình: $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = m$ (1)

a. Giải phương trình khi m = 17

b. Định tất cả các giá trị của m để phương trình vô nghiệm

Giải

• Đặt $t = \cos x - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = t + \frac{1}{2}$ và $1 - \cos x = \frac{1}{2} - t$

Ta có: $(1) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}+t\right)^4+\left(\frac{1}{2}-t\right)^4 = m \Leftrightarrow 2t^4+3t^2+\frac{1}{8}=m \quad (2)$

(2) là phương trình hoành độ điểm chung của đồ thị

(C): $y = 2t^4+3t^2+\frac{1}{8}$, với $-\frac{3}{2} \le t \le \frac{1}{2}$

và đường thẳng (D): y=m, song song với x'x. ta có

$y = 2t^4+3t^2+\frac{1}{8} \Rightarrow y' = 8t^3+6t = 2t(4t^2+3)$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, y = \frac{1}{8}$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
y'		–	0	+	
y	17	↘	$\frac{1}{8}$	↗	1

Phương trình (1) vô nghiệm khi đường thẳng (D) không cắt đồ thị (C) trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$ nghĩa là khi: $m < \frac{1}{8} \vee m > 17$

a. Khi m= 17

(D) cắt (C) tại điểm $t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi, \ k \in Z$

Nghiệm của (1) là: $x = (2k+1)\pi, \ k \in Z$

b. Phương trình vô nghiệm khi: $m < \frac{1}{8} \vee m > 17$

Đề 10: Cho phương trình:

$tg^2x + cotg^2x + m(tgx + cotgx) + 3 = 0$ (1)

a. Giải (1) khi $m = \frac{5}{2}$

b. Tìm mọi giá trị của m để (1) có nghiệm

Giải

• Điều kiện: $\cos x \ne 0, \sin x \ne 0 \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$

Đặt t = tgx + cotgx, với $|t| \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tgx = cotgx = ± 1

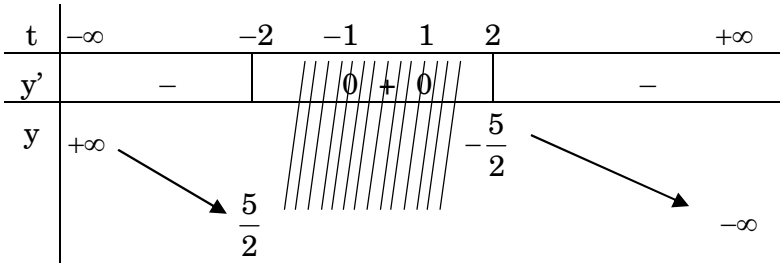
Ta có: (1) $\Rightarrow t^2 + mt + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 1 = -mt$ (2)

t = 0 không phải là nghiệm của (2). Do đó ta có: $-\frac{t^2+1}{t} = m$ (3)

(3) có thể xem là phương trình hoành độ điểm chung của đồ thị (C): $y = -\frac{t^2+1}{t}$ với đường thẳng (D): y =m , song song x'x

Xem hàm số $y = -t - \frac{1}{t}$ với $|t| \geq 2$

$y' = -1 + \frac{1}{t^2}$; y' = 0 $\Leftrightarrow$ t = ± 1



Để phương trình có nghiệm thì đường thẳng (D) phải cắt đồ thị (C) trên đoạn $|t| \geq 2$. Muốn vậy, ta phải có:

$m \geq \frac{5}{2} \vee m \leq -\frac{5}{2}$

a. Khi m= $\frac{5}{2}$

(D) cắt (C) tại điểm t = −2 $\Leftrightarrow$ tgx = cotgx = −1 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \ell\pi, \ell \in Z$

b. Phương trình có nghiệm khi $|m| \geq \frac{5}{2}$

Đề 11: Chứng minh rằng nếu $|m| \leq 2\sqrt{6}$ thì bất phương trình sau sẽ thỏa $\forall x$: cos2x + mcosx + 4 $\geq$ 0 (1)

Giải

• Đặt t = cosx với −1≤ t≤ 1. Ta có:

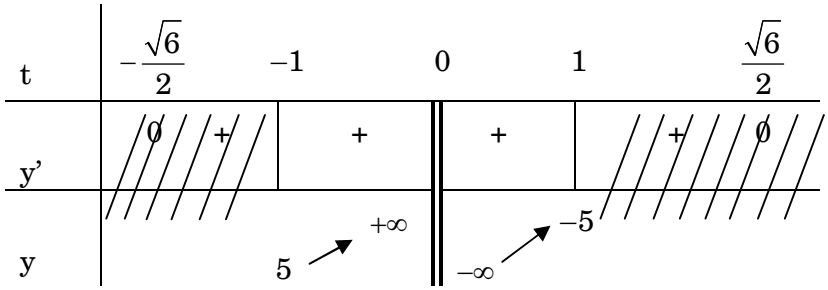
(1) $\Rightarrow 2t^2 + mt + 3 \geq 0 \Leftrightarrow mt \geq -2t^2 - 3$

$\Leftrightarrow m \geq -\dfrac{2t^2+3}{t}$ nếu $t > 0$ và $m \leq -\dfrac{2t^2+3}{t}$ nếu $t < 0$

Xem hàm số $y = -\dfrac{2t^2+3}{t} = -2t - \dfrac{3}{t}$

$$y' = -2 + \frac{3}{t^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ta có bảng biến thiên:



Ta phải có: $-5 < m < 5 \Leftrightarrow |m| < 5$

Do đó ta có: khi $|m| \leq 2\sqrt{6}$ thì $\cos 2x + m\cos x + 4 \geq 0\ \forall x$

Đề 12: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$\cos\varphi - \cos\frac{\varphi}{2} - 1 = 0 \quad \text{với } \varphi \in (-\pi, \pi)$$

Giải

• Đặt $x = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, với $x \in (-\infty, +\infty)$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} - mx - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = mx + 1 \qquad (*)$$

Có thể xem (*) là phương trình hoành độ điểm chung của đồ thị:

$$(C): y = \frac{-x^2+1}{x^2+1}$$

và đường thẳng (D) : y= mx+1

Nhận xét rằng (D) đi qua điểm A (0,1) thuộc (C) và có hệ số góc m.

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=mx+1\\ -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.\\ m=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}\end{cases}\Rightarrow m=0, m=-1, m=1$$

Qua A, có 3 đường thẳng tiếp xúc với (C) mà hệ số góc là

$m_1 = 0$, $m_2 = -1$, $m_3 = 1$

Theo đồ thị (mời các em tự vẽ) , ta có:

– Khi $m< -1$ hoặc $m > 1$ hoặc $m = 0$

phương trình (*) có 1 nghiệm: $x = 0 \Rightarrow tg\dfrac{\varphi}{2}=0\Rightarrow\dfrac{\varphi}{2}=k\pi$, $k\in Z$

$\Rightarrow$phương trình đã cho có 1 nghiệm: $\varphi = 0$ vì $\dfrac{\varphi}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

– Khi $m = -1$

Phương trình (*) có 2 nghiệm là: $x = 0$; $x = 1$

Với $x = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Với $x = 1 \Rightarrow tg\dfrac{\varphi}{2}=1\Rightarrow\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$

Mà $\dfrac{\varphi}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$Phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $\varphi = 0$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

– Khi $m = 1$

Tương tự, ta có: $\varphi = 0$; $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

– Khi $-1 < m < 0$ hoặc $0 < m < 1$:

Phương trình (*) có 3 nghiệm:

- $x_1 = 0$
- $0< x_2 < 1$ (?) $\vee$ $1 < x_2 < 0$
- $1< x_3 \vee x_3 < -1$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\in(-\pi;\pi)$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. Phương trình sinx = sinα

Hai cung hoặc hai góc có sin bằng nhau khi và chỉ khi chúng bằng nhau hoặc bù nhau, sai kém một bội số của chu kì.

Do đó $x = \alpha + k2\pi$

Hoặc $x = \pi - \alpha + k'2\pi$ với $k, k' \in Z$

Ghi nhớ: $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k'2\pi \text{ với } k, k' \in Z \end{cases}$

Ví dụ: • $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$

• $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ , } k \in Z$

• $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k'2\pi \text{ , với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$

• $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

Phương trình $\sin x = a$

Điều kiện $-1 \le a \le 1$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k'2\pi \end{array}\right. \quad k, k' \in Z$$

Đề 13: Giải phương trình: sin3x = sinx

Giải

Ta có: $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x + x = \pi + k'2\pi \end{array}\right. \quad k, k' \in Z$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình có 2 họ nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}, \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

Đề 14: Giải phương trình: $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \pi + k'2\pi \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ -x = \frac{\pi}{6} + (2k'+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + k.\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + (2\ell+1)\pi, \ell \in Z \end{array}\right.$$

Đề 15: Giải phương trình: sin 2x = cos3x

Giải

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - 3\pi + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{2} - 3x = \pi + 2k'\pi, \text{với } k, k' \in Z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ -x = \frac{\pi}{2} + k'2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + \ell 2\pi \ \ k, \ell \in Z \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \ell 2\pi, \ \ k, \ell \in Z \end{array}\right.$

Đề 16: Giải phương trình: sin 4x = – cosx

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sin 4x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi + k'2\pi \ \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 5x = \frac{\pi}{2} + (2k'+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{10} + (2k'+1)\frac{\pi}{5} \end{array}\right.$$

Đề 17: sin5x = – sin2x ?

II. Phương trình cosx = cosβ

Hai cung hoặc hai góc có cosin bằng nhau khi và chỉ khi chúng bằng nhau hoặc đối nhau sai kém một bội số của chu kì

Do đó $x = \beta + k2\pi$ Hoặc $x = -\beta + k2\pi$ với $k, k' \in Z$

Ghi nhớ: $\cos x = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + k2\pi \\ x = -\beta + k'2\pi \end{array}\right.$ với $k, k' \in Z$

Ta có thể viết chung lại: $x = \pm\beta + k2\pi$

ví dụ: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

Hoặc $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Các em muốn viết dạng nào cũng được

- $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in Z$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in Z$
- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in Z$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in Z$
- $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$
- $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi$
- Phương trình $\cos x = b$

Điều kiện: $-1 \le b \le 1$

$\cos x = b \Leftrightarrow x = \pm\arccos b + k2\pi$, $k \in Z$

Hoặc: chọn cung (góc β sao cho $\cos\beta = b$)

Do đó ta có $\cos x = \cos\beta$, trở lại dạng cơ bản

Tổng quát: $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k'2\pi \end{array}\right.$ với $k, k' \in Z$

Đề 18: Giải phương trình: cos2x = cosx

Giải

• Ta có: $\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k'2\pi \end{array}\right.$ với $k, k' \in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = k'.\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k'\dfrac{2\pi}{3}$

Đề 19: Giải phương trình: cos3x = sinx

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + x + k'2\pi \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k'\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm:

$x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + k'\pi$, $k, k' \in Z$

Đề 20: Giải phương trình: $\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin 3x$

Giải

• Ta có thể viết: $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} - 2x = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{4} - 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 3x + k'2\pi \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{20} + \ell\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. , \ell \in Z$$

Phương trình có 2 họ nghiệm:

$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi;\ x = \frac{3\pi}{20} + \ell\frac{2\pi}{5}, k, \ell \in Z$

Đề 21: Giải phương trình: cos5x = – cosx

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình:
cos5x = cos (π –x)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = -\pi + x + k'2\pi \end{array}\right.$ với $k, k' \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k'.\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 họ lời giải:

$x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{3};\ x = -\frac{\pi}{4} + k'.\frac{\pi}{2}$ với k, k' $\in Z$

Đề 22: Giải phương trình: $\sin^2 2x = \sin^2 3x$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 4x + k2\pi \\ 6x = -4x + \ell 2\pi \end{array}\right.$ với $k, \ell \in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k2\pi \\ 10x = \ell 2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \ell.\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \ell.\frac{\pi}{5}$ (vì sao?)

Vậy nghiệm của (1) là $x = \ell.\frac{\pi}{5}, \ell \in Z$

Đề 23: Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

(Bộ đề thi tuyển sinh)

Giải

• Điều kiện:

$\left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k.\frac{\pi}{4}, k \in Z \quad (*) \\ \sin x \neq 0 \end{array}\right.$

Với (*) phương trình đã cho tương đương với phương trình

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin x = 0$ (vì $\sin x \neq 0$) $\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + \ell 2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + \ell' 2\pi \end{array}\right. \text{, với } \ell, \ell' \in Z$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + \ell 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + \ell' 2\pi \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \ell.\frac{2\pi}{3}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta có: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{array}\right.$, với $m, n \in Z$

Đề 24: Giải phương trình: $\sin 5x\cos 3x = \sin 6x\cos 2x$ (1)

Giải

• Vận dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x)$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \ell\pi \end{array}\right. \text{ với } k, \ell \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \ell\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \ell.\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \text{ với } k, \ell \in Z$$

Đề 25: Giải phương trình: $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$ (1)

Giải

• Ta có: (1) $\Leftrightarrow \cos x - (1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z.$

Vậy nghiệm của (1) là: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

III. Phương trình tgx = tgγ

Hai cung hoặc hai góc có tang bằng nhau khi và chỉ khi chúng bằng nhau sai kém một bội số của chu kì

Do đó $x = \gamma + k\pi$, với $k \in Z$

Ghi nhớ: $tgx = tg\gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi$, với $k \in Z$

với điều kiện $x \neq (2\ell + 1)\frac{\pi}{2}$, $\ell \in Z$

ví dụ: • $tgx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

• $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

• $tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

• $tgx = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

• $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

• $tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

• $tgx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in Z$

• Phương trình tgx = c

Vì tgx lấy giá trị trong $(-\infty, +\infty)$, với điều kiện $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

nên phương trình: tgx = c

luôn luôn có nghiệm

$tgx = c \Leftrightarrow x = arctgc + k\pi$, $k \in Z$

Hoặc chọn cung γ (góc γ) sao cho $tg\gamma = c$

Ta trở lại dạng cơ bản: $tgx = tg\gamma$

• Tổng quát: $tgf(x) = tgg(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi$, $k \in Z$ với

$\begin{cases}\cos f(x) \neq 0\\ \cos g(x) \neq 0\end{cases}$

Đề 26: Giải phương trình: tg5xtg3x = 1

Giải

• Điều kiện $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}, x \neq (2\ell+1)\frac{\pi}{10}$ với $k, \ell \in Z$

Phương trình đã cho có thể viết:

$$tg5x = \frac{1}{tg3x} = cotg3x = tg\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right), x \neq m\frac{\pi}{3}, m \in Z$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + n\pi, n \in Z \Leftrightarrow 8x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{16} + n.\frac{\pi}{8}, n \in Z$

Đề 27: Giải phương trình: $tg\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)cotg(5x - \pi) = 1$

Giải

• Phương trình đã cho có thể viết:

$$tg\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{cotg(5x - \pi)} = tg(5x - \pi)$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = 5x - \pi + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}, k' \in Z$$

Giá trị này của x làm cho: $tg\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ và $cotg(5x - \pi)$ tồn tại

Đề 28: Giải phương trình: $tg\pi(2x+1) - tg\pi(x+1) = 0$

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$tg\pi(2x+1) = tg\pi(x+1) \Leftrightarrow \pi(2x+1) = \pi(x+1) + k\pi,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = x + 1 + k \Leftrightarrow x = k,\ k \in Z$

Đề 29: Giải phương trình: $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin(3x + \pi) = -\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(-\sin 3x)=-\cos 3x$$

$$\sin 3x\neq 0\Rightarrow tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cot g3x=tg\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-3x+k\pi, k\in Z\Leftrightarrow 4x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}, k\in Z$

PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. Phương trình bậc hai theo sinx hoặc cosinx

(1) Dạng: $a\sin^2x+b\sin x+c=0$ (1), $a\neq 0$

hoặc $a\cos^2x+b\cos x+c=0$ $(a\neq 0)$

(2) Phương pháp giải: Đặt $t=\sin x$ hoặc $t=\cos x$ với $-1\le t\le 1$

Ta có $at^2+bt+c=0$ (2)

– Nếu (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

– Nếu (2) có nghiệm kép $t_0\notin[-1,1]\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

– Nếu (2) có 2 nghiệm $t_1,t_2\notin[-1,1]\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

– Nếu (2) có 1 nghiệm $t\notin[-1,1]$ thì (1) có nghiệm cho bởi phương trình: $\sin x=t$ hoặc $\cos x=t$

Đề 30: Giải phương trình: $2\sin^2x-5\sin x+2=0$ (1)

Giải

• Đặt $t=\sin x$, với $-1\le t\le 1$ ta có: $2t^2-5t+2=0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm là: $t_1=2$; $t_2=\frac{1}{2}$

Nghiệm $t_1=2$ (loại); nghiệm $t_2=\frac{1}{2}$ thích hợp. Do đó ta có:

$$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k'2\pi\end{array}\right. \text{ với } k,k'\in Z$$

Vậy (1) có 2 họ nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi \quad \text{với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

Đề 31: Giải phương trình: $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$

Giải

Các hàm số sin và cosin đều có chu kì 2π nên ta có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \ell 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + \ell' 2\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$ với $k, \ell, \ell' \in Z$

Phương trình có 3 họ nghiệm là:

$x_1 = k\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \ell 2\pi;\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + \ell' 2\pi,$ với $k, \ell, \ell' \in Z$

Nếu đề bài yêu cầu x phải thỏa 1 điều kiện gì đó, chẳng hạn $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ (Đề 16, bộ đề thi) thì các em sẽ giải quyết tiếp như sau:

– Với $x = k\pi$, ta có: $\frac{\pi}{2} \le k\pi \le 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le k \le 3, k \in Z \Rightarrow k = 1, 2, 3$

Suy ra $x_1 = \pi; x_2 = 2\pi; x_3 = 3\pi$ thỏa

– Với $x = \frac{\pi}{6} + \ell 2\pi$, ta có:

$\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \ell 2\pi \le 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{6} + 2\ell \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \le 2\ell \le 3 - \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 2\ell \le \frac{17}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \ell \le \frac{17}{12}, \ell \in Z \Rightarrow \ell = 1$

suy ra $x_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ thỏa

– Với $x = \frac{5\pi}{6} + \ell' 2\pi$, ta có:

$\frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + \ell' 2\pi \le 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{5}{6} + 2\ell' \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \le 2\ell' \le 3 - \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le 2\ell' \le \frac{13}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le \ell' \le \frac{13}{12}, \ell' \in Z \Rightarrow \ell' = 0;1$

suy ra $x_5 = \frac{5\pi}{6}$; $x_6 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

Vậy phương trình đã cho sẽ có 6 nghiệm

$\pi, 2\pi, 3\pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ và $\frac{17\pi}{6}$

nếu kèm theo điều kiện $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

Đề 32: Giải phương trình: $\sin^2 x + \cos 2x + 3\sin x + 3 = 0$

Giải

• Phương trình đã cho có chứa $\sin^2 x$ và sinx. Ngoài ra còn có cos2x. Nếu ta thay thế $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ thì ta sẽ được một phương trình bậc hai theo sinx.

Phương trình đã cho có thể viết:

$\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$ (1)

Đặt $t = \sin x$, với $-1 \le t \le 1$, ta có: $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm là:

$t_1 = -1$, $t_2 = 4$ (loại) $\Rightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$

Đề 33: Giải phương trình: $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{6} = 0$

Giải

• Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$, ta có: $4t^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})t + \sqrt{6} = 0$ (1)

Biệt số $\Delta' = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

Phương trình (1) có 2 nghiệm là:

$t_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, thích hợp suy ra:

• $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k'2\pi \text{ với } k, k' \in Z \end{array}\right.$

• $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \ell 2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + \ell' 2\pi \text{ với } \ell, \ell' \in Z \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 họ nghiệm.

Đề 34: Giải phương trình: $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} = 0$ (1)

Giải

• Đặt $t = \cos x$, với $-1 \le t \le 1$, ta có:

$4t^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})t - \sqrt{6} = 0$ (2)

Biết số $\Delta' = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

Phương trình (2) có nghiệm

$t_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra:

• $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$

• $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + \ell 2\pi \quad \ell, \in Z$

Phương trình đã cho có 4 họ nghiệm

Đề 35: Giải phương trình: 2cosxcos2x = 1 + cos2x + cos3x

Giải

Trước hết, ta hãy biến đổi vế trái (VT). Ta có

$2\cos x\cos 2x = \cos 3x + \cos x$

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \Leftrightarrow \cos x = 1 + \cos 2x$

(Đơn giản 2 vế cho số hạng cos3x không ảnh hưởng đến nghiệm của phương trình).

Phương trình có số hạng cosx và cos2x. Ta thay $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, ta có 1 phương trình bậc 2 theo cosx.

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \ell 2\pi \end{array}\right. , \text{với } k, \ell \in Z$$

Đề 36: Giải phương trình: 3cosx + cos2x – cos3x + 1 = 2sinxsin 2x

Giải

- Ta phải biến đổi vế phải (VP): 2sinxsin2x = cosx – cos3x
- Phương trình đã cho tương đương với phương trình

3cosx + cos2x – cos3x +1 = cosx – cos3x

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x = (2\ell+1)\pi \end{array}\right. , k, \ell \in Z$$

II. Phương trình bậc hai theo tgx hoặc cotgx:

1. Dạng $atg^2x + btgx + c = 0$ (*) hoặc $acotg^2x + bcotgx + c = 0$ (**)

2. Phương pháp giải:

Đặt $t = tgx$ với $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$

hoặc $t = cotgx$ với $x \neq k\pi$, $k \in Z$

Ta sẽ được một phương trình bậc 2 theo t:

$at^2 + bt + c = 0$ (***)

– Nếu (***) vô nghiệm thì (*) hoặc (**) vô nghiệm

– Nếu (***) có nghiệm t_0 thì (*) hoặc (**) có nghiệm. Ta chỉ cần giải phương trình lượng giác cơ bản

$tgx = t_0$ hoặc $cotgx = t_0$

Đề 37: Giải phương trình: $\sqrt{3}tg^2x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$ (1)

Giải

- Điều kiện: $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$

Đặt t = tgx, ta có: $\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm: $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

suy ra: • $tgx = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \ell\pi,\ \ell \in Z$

• $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \ell'\pi,\ \ell' \in Z$

Các nghiệm đều thỏa điều kiện ở trên. Vậy phương trình (1) có 2 họ nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \ell\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \ell'\pi \ \ \ell, \ell' \in Z \end{array}\right.$$

Đề 38: Giải phương trình:

$tg^2x - (\sqrt{3} - 1)tgx + \sqrt{3} = 0$ (1) , với $x \in [-2\pi, 2\pi]$

Giải

• Điều kiện : $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

Đặt t = tgx, ta có: $t^2 - (\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} = 0$ (2)

Phương trình (2) có dạng a + b + c = 0 nên có 2 nghiệm là:

$t_1 = 1,\ \ t_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ \ k \in Z$

với $-2\pi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -2 \le \frac{1}{4} + k \le 2$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4} \le k \le \frac{7}{4}, k \in Z \Leftrightarrow k = -2, -1, 0, 1$

Do đó $x = -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ thỏa

• $tgx = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \ell\pi,\ \ell \in Z$

với $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + \ell\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \le \ell \le \frac{5}{3}, \ell \in Z \Rightarrow \ell = -2, -1, 0, 1$

Do đó $x = -\frac{5\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ thỏa

Vậy có 8 giá trị của x thỏa đề bài.

B. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Đề 39: Giải phương trình: $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$ (1)

Giải

• Thay $\sin 6x = \sin 2.3x = 2\sin 3x\cos 3x$. Ta có:

(1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x\cos^2 3x = 2$

Thay $\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$, ta có:

$2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 2 \Leftrightarrow 2\sin^4 3x - 3\sin^2 3x + 1 = 0$

Đặt $t = \sin^2 3x$, với $0 \le t \le 1$. Ta có:

Phương trình (2) có 2 nghiệm là: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$, thích hợp

Ta có: • $\sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \pm 1 \Leftrightarrow 3x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

• $\sin^2 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{4} + k'\pi, k' \in Z$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k'.\frac{\pi}{3}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nhóm nghiệm

$x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + k'.\frac{\pi}{3}, k, k' \in Z$

Đề 40: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$

Giải

• Vận dụng hằng đẳng thức

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x$.

• Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 2x\cos^2 2x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin^2 2x = \sin^2 2x\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x\left(\cos^2 2x-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos^2 2x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\ ,k\in Z\\ \cos 2x=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k.\frac{\pi}{2}\\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+\ell 2\pi \vee 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+m2\pi\end{array}\right. \ \ell, m\in Z$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k.\frac{\pi}{2}\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\ell\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\ell'\pi\end{array}\right.$$

Phương trình có 3 nhóm nghiệm.

Đề 41: Giải phương trình:

$$2\cos^2\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{8x}{5} \quad (1) \quad \textbf{(Bộ đề thi, Đề 15)}$$

Giải

• Ta nhận xét rằng: $\frac{6x}{5}=\frac{1}{2}.\frac{12x}{5}; \frac{12x}{5}=3.\frac{4x}{5}$ và $\frac{8x}{5}=2.\frac{4x}{5}$

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$1+\cos\frac{12x}{5}+1=3(2\cos^2\frac{4x}{5}-1)$$

$$\Leftrightarrow 2+\left(-3\cos\frac{4x}{5}+4\cos^3\frac{4x}{5}\right)=6\cos^2\frac{4x}{5}-3$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{4x}{5}-6\cos^2\frac{4x}{5}-3\cos\frac{4x}{5}+5=0$$

Đặt $t=\cos\frac{4\pi}{5}$ với $-1\le t\le 1$, ta có

$4t^3-6t^2-3t+5=0$ (2)

Phương trình (2) có dạng a + b + c + d = 0 nên có 1 nghiệm t = 1.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow (t-1)(4t^2-2t-5)=0$

$$\Leftrightarrow t_1=1, t_2=\frac{1-\sqrt{21}}{4}, t_3=\frac{1+\sqrt{21}}{4} \quad \text{(loại)}$$

$\Rightarrow \cos\frac{4x}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{5} = k2\pi, k \in Z \Leftrightarrow x = 5k\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{4x}{5} = \frac{1-\sqrt{21}}{4} \Leftrightarrow \frac{4x}{5} = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4} + \ell 2\pi, \ell \in Z$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4} + 5\ell.\frac{\pi}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nhóm nghiệm:

$x = 5k.\frac{\pi}{2};\ x = \pm\frac{5}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4} + 5\ell\frac{\pi}{2} \quad k, \ell \in Z$

Đề 42: Giải phương trình: $tg^4x - 4tg^2x + 3 = 0$ (1)

Giải

• Điều kiện: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

Đặt $t = tg^2x$ với $t \geq 0$, ta có:

$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = 3$ thích hợp

Suy ra: • $tg^2x = 1 \Leftrightarrow tgx = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

• $tg^2x = 3 \Leftrightarrow tgx = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \ell\pi, \ell \in Z$

Vậy phương trình có 4 nhóm nghiệm.

Đề 43: Giải phương trình: $tg2x = 3tgx$ (1)

Giải

• Điều kiện $2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in Z$

• Dùng công thức nhân 2. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \frac{2tgx}{1-tg^2x} = 3tgx$

$\Leftrightarrow 3tg^3x - tgx = 0 \Leftrightarrow tgx(3tg^2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ell\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + m\pi \text{ với } \ell, m \in Z \end{array}\right.$

Phương trình cho có các nhóm nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \ell\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + m\pi \text{ với } \ell, m \in Z \end{array}\right.$$

Đề 44: Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ (1)

Giải

- Ta có: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1-\cos 4x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình cos3x = 0 chứa tập nghiệm của phương trình cosx = 0. Do đó

$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in Z \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k.\dfrac{\pi}{3}$

Đề tương tự: Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$

Đề 45: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$ (1)

(Theo Bộ đề thi)

Giải

- Hạ bậc bằng cách vận dụng công thức nhân 2
- $\sin^4 x = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$
- $\cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \left[\dfrac{1 + \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2$

Thay vào (1) ta có: $= \dfrac{1}{4}(1 - \sin 2x)^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x)$

$\dfrac{1}{4}(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x + 1) = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) đã cho có 2 họ nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \qquad k \in Z$$

Đề 46: Giải phương trình: $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\cos x$ (1)

Giải

• Nhận xét: $x = k\pi, k \in Z$, không phải là nghiệm của (1) nên ta chia 2 vế của phương trình cho $\sin^3 x$. Ta có:

$1 + 4\cot g^3 x = 3\cot gx(1 + \cot g^2 x) \Leftrightarrow \cot g^3 x - 3\cot gx + 1 = 0$

Đặt $t = \cot gx$, ta có: $t^3 - 3t + 1 = 0$ (2)

Xem đa thức $f(t) = t^3 - 3t + 1$

Ta có: $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$

$f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$

Trong khoảng $(-2, 2)$, $f(t)$ đổi dấu 3 lần do đó $f(t) = 0$ có 3 nghiệm thuộc $(-2, 2)$

Đặt $t = 2\cos\varphi$, ta có: (2) $\Leftrightarrow 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3\varphi + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 3\varphi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\varphi = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{2\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3}$$

Do đó (2) có 3 nghiệm là

$$t_1 = 2\cos\varphi_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}$$

$$t_2 = 2\cos\varphi_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$t_3 = 2\cos\varphi_3 = 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm:

$$x_1 = \text{arc}\cot g\left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right) + k\pi$$

$x_2 = \text{arc cotg}\left(2\cos\frac{4\pi}{9}\right) + k\pi;\quad x_3 = \text{arc cot g}\left(2\cos\frac{8\pi}{9}\right) + k\pi, k \in Z$

Đề 47: Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ (1)

Giải

• Biến đổi phương trình (1) bằng cách vận dụng công thức nhân 2

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos2x + \cos4x + \cos6x = 0$

$\Leftrightarrow \cos6x + \cos2x + \cos4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos4x\cos2x + \cos4x = 0$

$\Leftrightarrow \cos4x(2\cos2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + \ell 2\pi\end{array}\right.$ với $k, \ell \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + k.\frac{\pi}{4}\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \ell\pi\end{array}\right.$

Vậy (1) có các họ nghiệm sau:

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + k.\frac{\pi}{4}\\ x = \frac{\pi}{3} + \ell\pi\\ x = -\frac{\pi}{3} + m\pi \quad \text{với } k, \ell, m \in Z\end{array}\right.$$

Đề tương tự: Giải phương trình: $\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

Đề 48: Giải phương trình: $\cos^4x - \cos2x + 2\sin^6x = 0$ (1)

Giải

• Ta hãy tính $\cos^4x$ và $\sin^6x$ theo $t = \cos2x$, với $-1 \le t \le 1$. Ta có:

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 + 2t + 1)$$

$$2\sin^6 x = 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 = 2\left(\frac{1-t}{2}\right)^3 = -\frac{1}{4}(t^3 - 3t^2 + 3t - 1)$$

Do đó: (1) $\Rightarrow \frac{1}{4}(t^2+2t+1)-t-\frac{1}{4}(t^3-3t^2+3t-1)=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-4t-t^3+3t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow t^3-4t^2+5t-2=0$ (2)

Phương trình có một nghiệm t = 1

(2) $\Leftrightarrow (t-1)(t^2-3t+2)=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t-2)=0 \Leftrightarrow t=1, t=2$

vì $t \in [-1,1]$ nên ta chọn

$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \cos 2x=1 \Leftrightarrow 2x=k2\pi, k\in Z \Leftrightarrow x=k\pi$

Vậy (1) có một họ nghiệm: $x=k\pi,\ k\in Z$

Đề 49: Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x$ (1)

(Theo Bộ đề thi)

Giải

Biến đổi vế trái, ta có:

$\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-2(\sin x\cos x)^4$

$=\left[1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right]^2-2.\frac{1}{16}\sin^4 2x$

$=1-\sin^2 2x+\frac{1}{4}\sin^4 2x-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1$

Do đó ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1=\frac{17}{16}(1-\sin^2 2x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x+\sin^2 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin^2 2x=-1$ (loại) $\vee \sin^2 2x=\frac{1}{2}$

Do đó $\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k.\frac{\pi}{4}, k\in Z$

Vậy nghiệm của (1) là $x=\frac{\pi}{8}+k.\frac{\pi}{4}, k\in Z$

Đề 50: Giải phương trình: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$ (1)

Giải

Vận dụng công thức nhân 2, ta có:

(1) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=2$

$\Leftrightarrow \cos 8x+\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos5x\cos3x + 2\cos5x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos5x(\cos3x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos5x\cos2x\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0 \quad (2)\\ \cos 2x = 0 \quad (3)\\ \cos x = 0 \quad (4)\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của (2) chứa tập nghiệm của (4). Do đó ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \ell\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{10} + k.\frac{\pi}{5}\\ x = \frac{\pi}{4} + \ell.\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \quad \text{với } k, \ell \in Z \qquad (*)$$

Vậy (*) là nghiệm của (1).

Đề 51: Giải phương trình: $\cos^2x + \cos^22x + \cos^23x = 1$ (1)

(Vô địch Toán quốc tế kì 4)

Giải

• Ta thay $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ và $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0$

Lại thay $\cos4x + \cos2x = 2\cos3x\cos x$

(Công thức nào, các em nhớ không?)

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 3x\cos 2x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 2x = 0 \vee \cos 3x = 0$

a/ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ (E_1)

b/ $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \ell\frac{\pi}{2}$, $\ell \in Z$ (E_2)

c/ $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{3}$, $m \in Z$ (E_3)

Ta nhận thấy $E_1 \subset E_3$. Do đó phương trình (1) có 2 họ nghiệm là

$x = \frac{\pi}{4} + \ell\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{3}$ với $\ell, m \in Z$

Các em cũng có thể thấy ngay là phương trình

$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow -3\cos x + 4\cos^3 x = 0$ chứa phương trình $\cos x = 0$

Đề 52: Giải phương trình: $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$ (1)

Giải

Biến đổi vế trái, ta có:

$(1) \Leftrightarrow (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x = \sin 2x \cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \frac{1}{2}\sin 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x + \sin 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 1 \\ \sin 4x = -2 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k.\frac{\pi}{2}$

Phương pháp: Gặp phương trình bậc cao, ta dùng phương pháp hạ bậc hoặc dùng ẩn số phụ.

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC CỔ ĐIỂN

I. Định nghĩa: Phương trình có dạng: $a\cos x + b\sin x = c$ (1)

a, b, c có thể là hằng số hoặc phụ thuộc một tham số.

II. Phương pháp giải:

A. Trường hợp đặc biệt:

1– Nếu a = 0:

(1) $\Rightarrow b\sin x = c$

- Nếu b = c = 0: (1) vô định
- Nếu b = 0, c $\neq$ 0: (1) vô nghiệm
- Nếu b $\neq 0$, ta có phương trình lượng giác cơ bản (PTLGCB)

$\sin x = \frac{c}{b}$ (PTLGCB)

2– Nếu b = 0:

(1) $\Rightarrow a\cos x = c$

- Nếu a = c = 0 : (1) vô định
- Nếu a = 0 , c $\neq 0$: (1) vô nghiệm
- Nếu a $\neq 0$, ta có PTLGCB: $\cos x = \frac{c}{a}$

3– Nếu c = 0

(1) $\Rightarrow a\cos x + b\sin x = 0$

Ta chỉ xét trường hợp a, b $\neq 0$. Ta có PTLGCB:

$\text{tgx} = -\dfrac{a}{b}$

4– Nếu $a = b \neq 0$, ta có:

$\cos x + \sin x = \dfrac{c}{a}$

Thay $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

hoặc $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

ta sẽ được một PTLGCB

5– Nếu $b = -a \neq 0$, ta có

$\cos x - \sin x = \dfrac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{c}{a}$ hoặc $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{c}{a}$

B. Trường hợp tổng quát: a, b ≠0

Cách 1: Dùng góc phụ

Chia 2 vế của phương trình

$a\cos x + b\sin x = c$

cho $a \neq 0$. Ta có: $\cos x + \dfrac{b}{a}\sin x = \dfrac{c}{a}$

Đặt $\dfrac{b}{a} = \text{tg}\varphi$, ta có:

$\cos x + \text{tg}\varphi \sin x = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\varphi = \dfrac{c}{a}\cos\varphi$

$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \dfrac{c}{a}\cos\varphi \quad (2)$

(2) là PTLGCB. Ta chọn cung (góc) α sao cho

$\cos\alpha = \dfrac{c}{a}\cos\varphi$ với $-1 \le \dfrac{c}{a}\cos\varphi \le 1 \Rightarrow \cos(x - \varphi) = \cos\alpha$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - \varphi = \alpha + k2\pi \\ x - \varphi = -\alpha + k'2\pi, k, k' \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + \alpha + k2\pi \\ x = \varphi - \alpha + k'2\pi \end{array}\right.$

Có thể viết chung: $x = \varphi \pm \alpha + \ell 2\pi \quad \ell \in Z$

Điều kiện để (1) có nghiệm cũng là điều kiện để (2) có nghiệm nghĩa là:

$$-1 \le \frac{c}{a}\cos\varphi \le 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \le 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}.\frac{1}{1+tg^2\varphi} \le 1 \text{ (Thay } tg\varphi = \frac{b}{a})$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)} \le 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2} \le 1$$

Vậy $a^2 + b^2 \ge c^2$

Chúng ta cũng có thể tìm thấy điều kiện này bằng cách vận dụng BĐT Bunhiacốpski. Ta có:

$c = a\cos x + b\sin x$

$$\Rightarrow c^2 = (a\cos x + b\sin x)^2 \le (a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow c^2 \le a^2 + b^2$$

Chú ý: Có thể đặt $\frac{b}{a} = \text{cotg}\theta$ hoặc chia 2 vế phương trình cho b.

Cách 2: Dùng ẩn số phụ

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$ với $x \ne (2k+1)\pi, k \in Z$

Ta có $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình $a\cos x + b\sin x = c$ trở thành

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow a - at^2 + 2bt = c + ct^2 \Leftrightarrow (c+a)t^2 - 2bt + c - a = 0 \quad (2)$$

Biệt số: $\Delta = b^2 - (c+a)(c-a) = b^2 - (c^2 - a^2) = a^2 + b^2 - c^2$

- $a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \Delta' < 0$: (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm
- $a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$: (2) có nghiệm $\Rightarrow$ (1) có nghiệm

Giải PTLGCB: $tg\frac{x}{2} = t$

Đề 53: Giải phương trình: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$ (1)

Giải

• Ta có: (1) $\Leftrightarrow \cos x + \text{tg}\frac{\pi}{3}\sin x = -1$

$\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi = \begin{bmatrix} (2k+1)\pi \\ -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{bmatrix}, k \in Z$

Đề 54: Giải phương trình: cos2x + sin2x = $\sqrt{2}$ (1)

Giải

• Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x = \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in Z \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Vậy $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in Z$

Đề 55: Giải phương trình: sinx + mcosx = 1 (1)

a. Giải (1) khi m = – $\sqrt{3}$

b. Định m để phương trình (1) vô nghiệm

c. Định m để phương trình (1) có nghiệm chung với phương trình msinx + cosx = m^2 (2)

Giải

a/ Khi m = – $\sqrt{3}$, ta có:

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x - \text{tg}\frac{\pi}{3}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \ell 2\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + \ell 2\pi \end{bmatrix}$ với $k, \ell \in Z$

b/ Điều kiện để (1) vô nghiệm là: $1 + m^2 < 1 \Leftrightarrow m^2 < 0$: vô lí

Vậy không tồn tại m để phương trình (1) vô nghiệm (còn có nhiều cách khác nữa, xin mời các em thử nghiên cứu)

c/ Giả sử (1) có nghiệm chung x_0 với (2). Ta có:

$$\begin{cases} \sin x_0 + m\cos x_0 = 1 \\ m\sin x_0 + \cos x_0 = m^2 \end{cases}$$

– Nếu m = 0, ta có:

$$\begin{cases} \sin x_0 = 1 \\ \cos x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ , k \in Z$$

– Nếu $m \neq 0$, ta có:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)\sin x_0 = m^3 - 1 \\ (m^2 - 1)\cos x_0 = -(m-1)m \end{cases}$$

- Khi $m = 1 \Rightarrow$ hệ vô định: (1) có vô số nghiệm chung với (2)
- Khi $m = -1 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm: (1) không có nghiệm chung với (2)
- Khi $m \neq \pm 1 \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$\begin{cases} \sin x_0 = \dfrac{m^2 + m + 1}{m + 1} \\ \cos x_0 = -\dfrac{m}{m + 1} \end{cases}$$

Ta phải có $\left(\dfrac{m^2 + m + 1}{m + 1}\right)^2 + \left(-\dfrac{m}{m + 1}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (m^2 + m + 1)^2 + m^2 = (m + 1)^2$

$\Leftrightarrow m^4 + 2m^2(m + 1) + (m + 1)^2 + m^2 = (m + 1)^2$

$\Leftrightarrow m^2(m^2 + 2m + 3) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 = 0$ (vì $m^2 + 2m + 3 > 0 \ \forall m$). Vậy $m = 0 \vee m = 1$

Đề 56: Giải phương trình: sinx + 2sin2x = 3 + sin3x (1)

Giải

- Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2\sin 2x - (\sin 3x - \sin x) = 3$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x - 2\cos 2x \sin x = 3 \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x \cos 2x = \dfrac{3}{2}$ (2)

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin^2 x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\sin 2x - \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cos 2x\right) = \frac{3}{2}$$

(Xem (2) là phương trình lượng giác cổ điển

asin2x + bcos2x = c mà a = 1, b = –sinx , c = $\frac{3}{2}$

ở vế trái, đặt $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\sin^2 x}$ làm thừa số chung)

Đặt cost = $\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $\sin t = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x - t) = \frac{3}{2}$$

$$VT \le \sqrt{2} < VP = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Đề 57: Giải phương trình: 3cosx + 2sinx = 1 (1)

Giải

• Chia 2 vế phương trình (1) cho 3, ta có: $\cos x + \frac{2}{3}\sin x = \frac{1}{3}$

Gọi $tg\varphi = \frac{2}{3}$, ta có: $\cos(x - \varphi) = \frac{1}{3}\cos\varphi$

Gọi α là cung (góc) mà $\cos\alpha = \frac{1}{3}\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos(x - \varphi) = \cos\alpha \Rightarrow x = \varphi \pm \alpha + k2\pi,\ k \in Z$

Đề 58: Giải và biện luận theo tham số m, phương trình

mcosx – sinx = m – 1 (1)

với $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$. Áp dụng m = 2.

Giải

• Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, $x \ne (2k+1)\pi$, $k \in Z$. Ta có:

$$m\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = m - 1 \Leftrightarrow (2m-1)t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (2)$$

Theo giả thiết, ta phải có: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{\pi}{12} < \text{tg}\frac{x}{2} < \text{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (*)

– Nếu $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

(2) $\Rightarrow t = \frac{1}{2}$ thỏa (*)

Nghiệm của (1) là $x = 2\text{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

– Nếu $m \neq \frac{1}{2}$: Điều kiện để (2) có nghiệm là:

$\Delta' = 1 + (2m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Đặt $f(t) = (2m-1)t^2 + 2t - 1$, ta có:

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = (2m-1).\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{2m}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3}$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow m > 2-\sqrt{3}$

$f(2-\sqrt{3}) = (2m-1)(7-4\sqrt{3}) + 2(2-\sqrt{3}) - 1 = 2(7-4\sqrt{3})m + 2\sqrt{3} - 4$

$f(2-\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4-2\sqrt{3}}{2(7-4\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$

Mặt khác: $2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Có các khả năng sau:

a/ Nếu $0 \leq m < 2-\sqrt{3} \Rightarrow (2m-1)f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

$(2m-1)f(2-\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $2-\sqrt{3}$ nằm ngoài khoảng 2 nghiệm của (2)

Ngoài ra $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{S}{2} = -\frac{1}{2m-1} \Rightarrow 2-\sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 \leq t_2$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm

b/ Nếu $2-\sqrt{3} < m < \frac{1}{2} \Rightarrow (2m-1)f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ và

$(2m-1)f(2-\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow 2-\sqrt{3} < t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_2$

Do đó phương trình (1) có nghiệm cho bởi $tg\frac{x}{2} = t_1$

c/ Nếu $\frac{1}{2} < m < 2+\sqrt{3} \Rightarrow (2m-1)f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

$(2m-1)f(2-\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow t_1 < 2-\sqrt{3} < t_2 < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó (1) có nghiệm cho bởi $tg\frac{x}{2} = t_2$

d/ Nếu $2+\sqrt{3} < m \Rightarrow (2m-1)f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

$(2m-1)f(2-\sqrt{3}) > 0$ và $\frac{S}{2} < 2-\sqrt{3} \Rightarrow t_1 < t_2 < 2-\sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó (1) vô nghiệm

Vậy (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $2-\sqrt{3} < m < 2+\sqrt{3}$

+ Áp dụng: Khi $m = 2$, ta có: $(1) \Rightarrow 2\cos x - \sin x = 1$

$(2) \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Do đó: • $tg\frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Ta phải có: $\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{3}$, không tồn tại

• $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, thỏa $\Leftrightarrow x = 2\text{arctg}\frac{1}{3} + \ell 2\pi$, $\ell \in Z$

Đề 58: Giải phương trình: $tgx + \sqrt{3}cotgx = 1 + \sqrt{3}$ (1)

Giải

• Thay $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ và $cotgx = \frac{\cos x}{\sin x}$, với $x \neq k.\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

$(1) \Rightarrow \sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x = (1+\sqrt{3})\sin x \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \sqrt{3}\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3})\sin 2x + (1-\sqrt{3})\cos 2x = 1+\sqrt{3}$

Chia 2 vế cho 1+ $\sqrt{3}$, ta có: $\sin 2x - \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x - (2-\sqrt{3})\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x - tg\dfrac{\pi}{12}\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} = \sin\dfrac{5\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12} + \ell 2\pi \end{array}\right.$, với $k, \ell \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \ell\pi \end{array}\right.$, thỏa

Đề 59: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \frac{m-1}{m+1} \qquad (1)$$

Giải

- Điều kiện để (1) có nghiệm là: $\left(\dfrac{m-1}{m+1}\right)^2 \le 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, $m \ne -1$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 \le 4(m+1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 10m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -3 \vee m \ge -\dfrac{1}{3}$

Cách 2: Ta có thể viết: $\cos x + tg\dfrac{\pi}{3}\sin x = \dfrac{m-1}{m+1}$, $m \ne -1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{m-1}{m+1}\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{m-1}{2(m+1)}$

Ta phải có: $-1 \le \dfrac{m-1}{2(m+1)} \le 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{m-1}{2(m+1)}\right)^2 \le 1$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 \le 4(m+1)^2 \Rightarrow$ đpcm

Các em hãy tìm các cách giải khác

Đề 60: Giải phương trình: 3cosx + 4sinx = 5 (1)

Giải

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ta có: (1) $\Rightarrow 3.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4.\frac{2t}{1+t^2} = 5$ (1)

$\Leftrightarrow 3 - 3t^2 + 8t = 5 + 5t^2 \Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm kép

$t_1 = t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

Vậy nghiệm của (1) là: $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

Đề 61: Định mọi giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm: $\cos 2x - 2m\sqrt{2}\sin 2x = 2 - m$

Giải

Vận dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có

$(2-m)^2 \le 1 + 8m^2 \Leftrightarrow 4 - 4m + m^2 \le 1 + 8m^2$

$\Leftrightarrow 7m^2 + 4m - 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1 \vee m \ge \frac{3}{7}$

Để phương trình có nghiệm, ta phải có: $m \le -1 \vee m \ge \frac{3}{7}$

Cách 2: Chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{1+8m^2}$, ta có:

$\frac{1}{\sqrt{1+8m^2}}\cos 2x - \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{1+8m^2}}\sin 2x = \frac{2-m}{\sqrt{1+8m^2}}$

Đặt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+8m^2}}$, $\sin\alpha = \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{1+8m^2}}$

Phương trình trở thành

$\cos 2x\cos\alpha - \sin 2x\sin\alpha = \frac{2-m}{\sqrt{1+8m^2}} \Leftrightarrow \cos(2x+\alpha) = \frac{2-m}{\sqrt{1+8m^2}}$

Điều kiện có nghiệm là $-1 \le \frac{2-m}{\sqrt{1+8m^2}} \le 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2-m}{\sqrt{1+8m^2}}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow (2-m)^2 \le 1 + 8m^2$

$\Leftrightarrow 7m^2 + 4m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \ \vee \ m \geq \frac{3}{7}$

Ta tìm lại được kết quả ở trên.

PHƯƠNG TRÌNH TOÀN PHƯƠNG

(Phương trình bậc hai theo sinx và cosx)

1. Phương trình có dạng: $A\sin^2x + B\sin x\cos x + C\cos^2x + D = 0$ (1)
2. Phương pháp giải

a/ Phương pháp 1: Đưa về dạng phương trình lượng giác cổ điển

Thay

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{C-A}{2}\cos 2x + \frac{B}{2}\sin 2x = -\frac{A}{2} - \frac{C}{2} - D$

$\Leftrightarrow (C-A)\cos 2x + B\sin 2x = -A - C - 2D$

Điều kiện có nghiệm là: $(C-A)^2 + B^2 \geq (A + C + 2D)^2$

Cách giải ta đã biết

b/ Phương pháp 2: Đưa về phương trình bậc 2 theo tgx.

α. Nếu $A + D = 0 \Leftrightarrow D = -A$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow C\cos^2 x - A(1 - \sin^2 x) + B\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow C\cos^2 x - A\cos^2 x + B\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (C-A)\cos^2 x + B\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x[(C-A)\cos x + B\sin x] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\(C-A)\cos x + B\sin x = 0\end{array}\right.$

Ta được những phương trình lượng giác cơ bản.

β. Nếu $A + D \neq 0$: phương trình (1) không thể có nghiệm cho bởi cosx = 0

Do đó có thể chia 2 vế của (1) cho $\cos^2x$:

$Atg^2x + Btgx + C + D(1+tg^2x) = 0$

$\Leftrightarrow (A + D)tg^2x + Btgx + C + D = 0$

Ta được phương trình bậc hai theo tgx mà cách giải ta đã biết

Đề 62: Giải phương trình: $3\sin^2x + 8\sin x\cos x + 4\cos^2x = 0$ (1)

Giải

• Vì $\cos x \neq 0$ nên ta chia 2 vế phương trình (1) cho $\cos^2x$. Ta có:

$3tg^2x + 8tgx + 4 = 0$

Ta được một phương trình bậc 2 theo tgx mà 2 nghiệm là

$tgx = -\frac{2}{3}$; $tgx = -2 \Rightarrow x = \text{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$

$x = \text{arctg}(-2) + \ell\pi$ với $k, \ell \in Z$

Đề 63: Giải phương trình: $4\cos^2x - 6\sin^2x + 5\sin 2x - 4 = 0$ (1)

Giải

Cách 1:

• Vì $\cos x \neq 0$, ta chia 2 vế phương trình cho $\cos^2x$:

$4 - 6tg^2x + 10tgx - 4(1 + tg^2x) = 0 \Leftrightarrow -10tg^2x + 10tgx = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \ell\pi \end{array}\right.$ với $k, \ell \in Z$

+ Chú ý: Khi chia cho $\cos^2x$ thì cũng có nghĩa là nhân với $\frac{1}{\cos^2 x}$ hay nhân với $(1 + tg^2x)$

Cách 2: Ta hãy thay $\cos^2x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ và $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ vào (1) ta có: $4.\frac{1 + \cos 2x}{2} - 6.\frac{1 - \cos 2x}{2} + 5\sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cos 2x - 3 + 3\cos 2x + 5\sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 5\cos 2x + 5\sin 2x = 5 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + m2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + n2\pi \end{array}\right.$ với $m, n \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + m2\pi \\ 2x = n2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + m\pi \\ x = n\pi \end{array}\right.$

Kết quả dĩ nhiên, phù hợp với cách giải trên.

Đề 64: Giải phương trình:

$$7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 3\sqrt[3]{15} = 0 \quad (1)$$

Giải

• Cách 1: Thay $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ và $2\sin x\cos x = \sin 2x$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{7(1-\cos 2x)}{2} + 2\sin 2x - \frac{3(1+\cos 2x)}{2} - 3\sqrt[3]{15} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\cos 2x + 2\sin 2x + 2 - 3\sqrt[3]{15} = 0 \quad (2)$$

Vận dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$(-5\cos 2x + 2\sin 2x)^2 \le 29$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{29} \le -5\cos 2x + 2\sin 2x \le \sqrt{29}$$

Do đó: $-5\cos 2x + 2\sin 2x + 2 - 3\sqrt[3]{15} \le \sqrt{29} + 2 - 3\sqrt[3]{15} < 0$

$\Rightarrow$(2) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho là vô nghiệm.

Cách 2: Trong (1) nếu ta cho $\cos x = 0$ thì

$(1) \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3\sqrt[3]{15}}{7}$, vô lí

Do đó $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$, ta có

$$7\tg^2 x + 4\tg x - 3 - 3\sqrt[3]{15}(1+\tg^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (7 - 3\sqrt[3]{15})\tg^2 x + 4\tg x - 3(1 + 3\sqrt[3]{15}) = 0 \quad (3)$$

Ta có: $\Delta' = 4 + 3(7 - 3\sqrt[3]{15})(1 + 3\sqrt[3]{15}) = 4 + 3(7 + 4\sqrt[3]{15} - 3\sqrt[3]{225})$

$= 25 + 12\sqrt[3]{15} - 9\sqrt[3]{225}$

Các em so sánh $25 + 12\sqrt[3]{15}$ và $9\sqrt[3]{225}$ bằng cách lập phương 2 biểu thức $\Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$(3) vô nghiệm$\Rightarrow$(1) vô nghiệm

Đề 65: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$3\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 5\cos^2 x + m = 0 \ (1)$$

Giải

Cách 1: $(1) \Leftrightarrow 3\frac{1-\cos 2x}{2} - 3\sin 2x - 5\frac{1+\cos 2x}{2} + m = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2x-3\sin 2x-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\cos 2x+m=0$

$\Leftrightarrow -4\cos 2x-3\sin 2x=-m+1 \Leftrightarrow 4\cos 2x+3\sin 2x=m-1 \quad (2)$

(2) là phương trình lượng giác cổ điển có

$a=4,\ b=3,\ c=m-1$

Để (1) có nghiệm thì (2) phải có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 \le a^2+b^2$

$(m-1)^2 \le 16+9=25 \Leftrightarrow -5 \le m-1 \le 5 \Leftrightarrow 4 \le m \le 6$

Vậy để (1) có nghiệm thì $-4 \le m \le 6$

Cách 2: cho cosx = 0: (1) $\Rightarrow 3+m=0 \Leftrightarrow m=-3$

Do đó (1) có nghiệm khi $m=-3$ (a)

– Giả sử $m \ne -3 \Leftrightarrow \cos \ne 0$

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta có:

$3tg^2x-6tgx-5+m(1+tg^2x)=0$

$\Leftrightarrow (m+3)tg^2x-6tgx+m-5=0 \quad (2)$

Vì $m \ne -3$ nên (2) là một phương trình bậc 2 theo tgx. Điều kiện có nghiệm của (2) là:

$\Delta' \ge 0, m \ne -3 \Leftrightarrow 9-(m+3)(m-5) \ge 0, m \ne -3$

$\Leftrightarrow m^2=2m-24 \le 0, m \ne -3 \Leftrightarrow -4 \le m \le 6, m \ne -3 \quad (b)$

Kết hợp (a) và (b) ta có tập các giá trị của m phải tìm là đoạn [–4,6].

Đề 66: Giải phương trình

$3\sin^2 x-(3+\sqrt{3})\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$ (1) với $x \in [0,2\pi]$

Giải

• Vì cosx = 0 không phải là nghiệm của (1) nên ta có thể chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$. Ta có: (1) $\Rightarrow 3tg^2x-(3+\sqrt{3})tgx+\sqrt{3}=0$

Đây là một phương trình bậc hai theo tgx, có tổng các hệ số bằng 0, do đó phương trình có 2 nghiệm là:

$tgx=1;\ tgx=\frac{\sqrt{3}}{3}$

a/ Với tgx = 1, ta có: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in Z$

Vì $x \in [0,2\pi]$ nên ta có thể thấy ngay là: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5x}{4}$

Hoặc có thể lí giải như sau:

$x \in [0,2\pi] \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le k\pi \le \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le k \le \frac{7}{4} < 2$

Do $k \in Z$ nên k chỉ có thể là 0 hoặc 1 $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$

b/ Với $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ta có: $x = \frac{\pi}{6} + \ell\pi, \ell \in Z$

vì $x \in [0,2]$ nên ta có: $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$

Vậy bài toán có 4 lời giải

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{7\pi}{6}$$

Đề 67: Định các giá trị của m để cho phương trình sau có nghiệm: $6\sin^2 x + m\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 + m$ (1)

Giải

• Ta biến đổi vế trái của (1)

$$(1) \Leftrightarrow 6.\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{m\sin 2x}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} = 2 + m$$

$$\Leftrightarrow 6 - 6\cos 2x + m\sin 2x - 1 - \cos 2x = 4 + 2m$$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x - 7\cos 2x = 2m - 2 \quad (2)$$

Điều kiện để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + 49 \ge (2m-2)^2 \Leftrightarrow m^2 + 49 \ge 4m^2 - 8m + 4$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m - 45 \le 0 \Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{151}}{3} \le m \le \frac{4+\sqrt{151}}{3}$$

Vậy để (1) có nghiệm, ta phải có: $\frac{4-\sqrt{151}}{3} \le m \le \frac{4+\sqrt{151}}{3}$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI sinx và cosx

1. Phương trình có dạng

$A(\sin x + \cos x) + B\sin x\cos x + C = 0$ (1)

2. Phương pháp giải:

Đặt $\sin x + \cos x = t$, với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$At + \frac{B(t^2 - 1)}{2} + C = 0 \Leftrightarrow Bt^2 + 2At + 2C - B = 0 \quad (2)$$

Giải (2):

– Nếu (2) vô nghiệm $\Rightarrow$(1) vô nghiệm

– Nếu (2) có nghiệm $t \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow$ (1) vô nghiệm

– Nếu (2) có nghiệm $t_0 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ta giải phương trình:

$\sin x + \cos x = t_0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_0 \text{ (hoặc } \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t_0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t_0}{\sqrt{2}} \text{ (hoặc } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t_0}{\sqrt{2}})$$

• Chú ý 1:

– Nếu $A(\sin x - \cos x) + B\sin x\cos x + C = 0$ (1)

Ta đặt $\cos x - \sin x = t$

Khi đó ta sẽ có $\sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

• Chú ý 2:

Có thể dùng phương pháp góc phụ:

Đặt $x = \frac{\pi}{4} - z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos z \\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\cos 2z \end{cases}$$

hoặc $x = \frac{\pi}{4} + z$

Đề 68: Giải phương trình: $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) - \sin x \cos x = 1$ (1)

Giải

• Đặt cosx + sinx = t , với $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (*)

$\Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có: (1) $\Rightarrow t\sqrt{2} - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t\sqrt{2} + 1 = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm là:

$t_1 = \sqrt{2} - 1$ (thỏa (*))

$t_2 = \sqrt{2} + 1$ (loại)

Do đó ta có: cosx + sinx = $\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + k2\pi, k \in Z$

Vậy nghiệm của (1) là:

$x = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + k2\pi, k \in Z$

Đề 69: Giải phương trình:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$$ **(Theo bộ đề thi)**

Giải

• Điều kiện:

$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k.\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$\cos x + \sin x + \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \dfrac{10}{3}$

Đặt cosx + sinx = t , với $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (*)$\Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có: $t + \dfrac{t}{\dfrac{t^2 - 1}{2}} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow t + \dfrac{2t}{t^2 - 1} = \dfrac{10}{3}$ với $t \neq \pm 1$ (**)

$\Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0$

Phương trình có nghiệm t = 2 do đó ta đặt t – 2 làm thừa số chung:

$(t - 2)(3t^2 - 4t - 5) = 0$ (2)

Suy ra (2) có 3 nghiệm là:

$t_1 = 2$ (loại)

$t_2 = \dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$ (loại)

$t_3 = \dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$ (thỏa các điều kiện (*) và (**))

Do đó, ta có:

$$\cos x + \sin x = \frac{2-\sqrt{19}}{3} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k'2\pi, k'2\pi \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k'2\pi$$

(x thỏa điều kiện ban đầu: $x \neq k.\dfrac{\pi}{2}$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + k'2\pi, k' \in Z$$

Đề 70: Cho phương trình:

$$\textbf{sin 2x} - \textbf{2m}\sqrt{\textbf{2}}\textbf{(cos x + sin x)} + \textbf{1} - \textbf{6m}^{\textbf{2}} = \textbf{0} \quad \textbf{(1)}$$

a. Giải (1) khi m = 1

b. Định m để (1) có nghiệm.

Giải

• a. Khi m = 1, ta có:

$\sin 2x - 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 5 = 0$ (2)

Đặt $\cos x + \sin x = t$, với $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Do đó ta có: $t^2 - 1 - 2t\sqrt{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t\sqrt{2} - 6 = 0$ (3)

Phương trình (3) có 2 nghiệm là:

$t_1 = -\sqrt{2}$; $t_2 = 3\sqrt{2}$ (loại)

$\Rightarrow \cos x + \sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi, k \in Z$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, k \in Z$

b. Với cách đặt cosx + sinx = t, $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ta có:

(1) $\Rightarrow t^2 - 2m\sqrt{2}t - 6m^2 = 0$ (1')

– Nếu m = 0 : (1')

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

– Nếu $m \neq 0$: (1') có 2 nghiệm $t_1 = -m\sqrt{2}$, $t_2 = 3m\sqrt{2}$

Ta phải có: $-\sqrt{2} \le -m\sqrt{2} \le \sqrt{2} \vee -\sqrt{2} \le 3m\sqrt{2} \le \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -1 \le m \le 1 \vee -\frac{1}{3} \le m \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$

Vậy $-1 \le m \le 1$

Đề 71: Định a để phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\sin 3x} = 4a$$ **(Theo bộ đề thi)**

Giải

• Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 6x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k.\frac{\pi}{6}, k \in Z$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$\frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin 3x \cos 3x} = 4a$ (1)

Đặt sin3x – cos3x= t , với $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (*)

$\Rightarrow \sin 3x \cos 3x = \frac{1 - t^2}{2}$, ta có:

$\frac{2t}{1 - t^2} = 4a$, $t \neq \pm 1$ (**) $\Leftrightarrow 4at^2 + 2t - 4a = 0 \Leftrightarrow 2at^2 + t - 2a = 0$ (2)

– Nếu a = 0: (2) $\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

– Nếu $a \neq 0$

(2) có 2 nghiệm t_1, t_2 trái dấu

Đặt $f(t) = 2at^2 + t - 2a$

Ta có: $f(1) = 1$; $f(-1) = -1$

Do đó $t = \pm 1$ không phải là nghiệm của (2) mà $f(1).f(-1) = -1 < 0 \Rightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [-1,1]$ nghĩa là (2) có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $\forall a$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall a$.

Đề 72: Giải và biện luận phương trình

$$\textbf{sinxcosx – m(sinx + cosx) +1 = 0 (1)}$$

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$, với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Ta có:

$$(1) \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{2} - mt + 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 2mt + 1 = 0 \quad (2)$$

Điều kiện để (2) có nghiệm là

$$\Delta' = m^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1 \vee m \ge 1 \quad (3)$$

Đặt $f(t) = t^2 - 2mt + 1$. Ta có:

$$f(\sqrt{2}) = 2 - 2m\sqrt{2} + 1 = 3 - 2m\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = 2 + 2m\sqrt{2} + 1 = 3 + 2m\sqrt{2}$$

Để (1) có nghiệm thì (2) phải có 1 nghiệm

$$t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow f(\sqrt{2})f(-\sqrt{2}) < 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2m\sqrt{2})(3 + 2m\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{4} < m < \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

Hoặc cả 2 nghiệm $\in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Ta có

$$f(\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (5)$$

$$f(-\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow 3 + 2m\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (6)$$

$$-\sqrt{2} < \frac{S}{2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \quad (7)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi các điều kiện (3) (5), (6) và (7) thỏa

Vậy: (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{-3\sqrt{2}}{4} < m \le -1 \ \vee \ 1 \le m < \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Cách 2: Dùng góc phụ

Đặt $x = \frac{\pi}{4} - z \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4} - x$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos z$$

và $\text{sinxcosx} = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{1}{2}\cos 2z$

Đề 73: Giải và biện luận phương trình

sinxcosx – sinx – cosx + m = 0 (1)

Giải

• Ta hãy dùng phương pháp góc phụ

Đặt $x = \frac{\pi}{4} - z$, ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2z$

Do đó: (1) $\Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2z - \sqrt{2}\sin z + m = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1) - \sqrt{2}\cos z + m = 0 \Leftrightarrow \cos^2 z - \sqrt{2}\cos z + m - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 z - 2\sqrt{2}\cos z + 2m - 1 = 0 \quad (2)$$

a) Phương trình (1) có 1 nghiệm nếu

$$f(1)f(-1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{2}+1}{2} < m < \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$$

với $f(t) = 2t^2 - 2\sqrt{2}t + 2m - 1$

và $t \in [-1, 1]$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi

• $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \le 1$

• $f(-1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

• $f(1) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

và $-1 < \frac{S}{2} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ (thỏa $\forall m$)

hay $\frac{2\sqrt{2}-1}{2} < m \le 1$

Chú ý: Sau khi các em tìm được t tức là cosz và ta suy ra giá trị của z.

$z = \pm \arccos t + k2\pi, k \in Z$

Do đó: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos t + m2\pi, m \in Z$

• Cũng có thể đặt $x = \frac{\pi}{4} + z$

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Phương pháp giải: Biến đổi phương trình vô tỉ thành hữu tỉ

1– Dạng I: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1)

a. Ta phải buộc một số điều kiện:

– Điều kiện để căn thức bậc chẵn nói chung và bậc 2 nói riêng, có nghĩa là biểu thức nằm dưới dấu căn không âm: $f(x) \ge 0$ (a)

– Trong điều kiện này, vế trái không âm do đó để phương trình có nghĩa thì ta phải có vế phải cũng không được âm: $g(x) \ge 0$ (b)

– Giao của 2 tập nghiệm (a) và (b) là điều kiện để (1) có nghĩa. Nghiệm của (1) phải thỏa điều kiện giao này.

b) Với điều kiện này, 2 vế của (1) không âm, ta bình phương 2 vế của (1), ta có: $f(x)= [g(x)]^2$ (2)

(2) là một phương trình mà ta đã quen thuộc cách giải. Giải (2), đối chiếu điều kiện, chọn nghiệm thích hợp. Ta có nghiệm của (1)

Sơ đồ cách giải:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

Đề 74: $\sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x} = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 1+8\sin 2x\cos^2 2x \ge 0 \quad (a) \\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0 \qquad (b) \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*), ta có:

(1) $1+8\sin 2x\cos^2 2x = 4\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(Biến đổi và làm gọn từng vế)

$\Leftrightarrow 1+8\sin 2x\cos 2x\cos 2x = 4\dfrac{1-\cos\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}$

$\Leftrightarrow 1+4\sin 4x\cos 2x = 2(1+\sin 6x)$

$\Leftrightarrow 1+2(\sin 6x+\sin 2x) = 2+2\sin 6x \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2}$ (2)

Phương trình (2) có 2 nhóm nghiệm:

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12}+\ell\pi \text{ với } k,\ell \in Z \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*):

– Vì $\sin 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1+8\sin 2x\cos^2 2x > 0$

$(1+8\sin 2x\cos^2 2x = 1+8.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4} = 1+3 = 4 > 0)$

Vậy (a) được thỏa $\forall x$ sao cho sinx= $\dfrac{1}{2}$

– Ta chỉ cần xét điều kiện (b)

• Với $x = \dfrac{\pi}{12}+k\pi, k \in Z \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$= \left[\begin{array}{l} 1 > 0 \text{ nếu } k \text{ chẵn}: k = 2m \\ -1 < 0 \text{ nếu } k \text{ lẻ}: k = 2n+1, m \in Z \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (b) chỉ thỏa với $k = 2m$

• Với $x = \dfrac{5\pi}{12}+\ell\pi, \ell \in Z \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\ell\pi\right)$

$= \begin{bmatrix} -1 < 0 \text{ nếu } \ell \text{ chẵn}: \ell = 2n \\ 1 < 0 \text{ nếu lẻ}: \ell = 2n+1 \end{bmatrix}, n \in Z \Rightarrow$ (b) chỉ thỏa với l= 2n + 1

Vậy nghiệm của (1) là: $x = \frac{\pi}{12} + m.2\pi$; $x = \frac{5\pi}{12} + (2n+1)\pi$ $(m, n \in Z)$

Đề 75: Giải phương trình:

$$\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x} \quad (1)$$ *(Bộ đề thi)*

Giải

• Tuy phương trình có chứa hai căn thức nhưng ngoài các căn thức ra, phương trình không chứa một số hạng nào khác. Do đó ta có thể xếp loại phương trình này vào dạng 1.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\cos 2x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \\ 2 - 3\cos 2x = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq \frac{2}{3} \text{ (a)} \\ \sin x \geq 0 \text{ (b)} \\ -3\cos 2x - \sin x + 2 = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Giải (2): $-3\cos 2x - \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow -3(1 - 2\sin^2 x) - \sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Đối chiếu với (b) $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

Ta có $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2.\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ thỏa (a)

Vậy nghiệm của (1) cho bởi

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi$ với $k, k' \in Z$

Đề 76: Giải phương trình: $\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}$ **(1)**

Giải

• Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3+4\cos 2x\ge 0\\ \cos x\ge 0\\ 3+4\cos 2x=2\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\ge -\dfrac{3}{4}\ (a)\\ \cos x\ge 0\ (b)\\ 4\cos 2x-2\cos x+3=0\ \ (2)\end{cases}$$

Giải (2): ta có (2) $\Leftrightarrow 4(2\cos^2 x-1)-2\cos x+3=0$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2 x-2\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

Đối chiếu với (b), ta chọn $\cos x=\dfrac{1}{2}$

Ta có: $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2.\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{1}{2}>-\dfrac{3}{4}$ thỏa (a)

Vậy nghiệm của (1) cho bởi $\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$

2. Dạng II: $\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}=g(x)\quad(1)$

Điều kiện: $\begin{cases}f_1(x)\ge 0\\ f_2(x)\ge 0\quad(*)\\ g(x)\ge 0\end{cases}$

Với điều kiện (*) ta có: (1) $\Leftrightarrow f_1(x)+f_2(x)+2\sqrt{f_1(x)f_2(x)}=[g(x)]^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{f_1(x)f_2(x)}=[g(x)]^2-f_1(x)-f_2(x)\quad(2)$

Ta trở lại dạng I. Nhưng ngoài (*) ta phải buộc thêm điều kiện để cho (2) có nghĩa: $[g(x)]^2-f_1(x)-f_2(x)\ge 0$ (**)

Giải (2), đối chiếu các điều kiện (**) và (*) hoặc giao của chung, suy ra nghiệm của (1).

Đề 77: Cho phương trình: $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=k\cos x\quad(1)$

a. Giải (1) khi k = 1, k = 2

b. Giải và biện luận (1) theo k

(Theo bộ đề thi)

Giải

Ta có: $1 + \sin x \geq 0 \ \forall x$

$1 - \sin x \geq 0 \forall x$ (Vì sao?)

Điều kiện: $k\cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x$ và k cùng dấu. Với điều kiện trên, ta có: $(1) \Leftrightarrow 1 + \sin x + 1 - \sin x + 2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)} = k^2 \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = k^2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{\cos^2 x} = k^2 \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2 + 2|\cos x| = k^2 \cos^2 x \Leftrightarrow k^2 \cos^2 x - 2|\cos x| - 2 = 0 \quad (2)$

a. Trường hợp $k = 1; k > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0$

$(2) \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 + \sqrt{3} > 1, \cos x = 1 - \sqrt{3} < 0$

Cả 2 nghiệm đều không thỏa điều kiện. Do đó (1) vô nghiệm khi $k = 1$

* Trường hợp $k = 2; k > 0 \Rightarrow \cos x > 0 \quad (*)$

$$(2) \Rightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (*), ta có: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = \ell 2\pi \ , \ell \in Z$

b. Giải và biện luận theo k:

Đặt $t = |\cos x|$, với $t \geq 0$. Ta có: $k \neq 0 \Rightarrow (3)$ có 2 nghiệm trái dấu

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2} > 0; \ t_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2} < 0 \quad \text{(loại)}$$

Do đó ta có: $|\cos x| = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2}$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2k^2} \leq k^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 1 > 0 \\ 1 + 2k^2 \leq (K^2 - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 1 \\ k^4 - 4K^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 1 \\ k^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 1 \\ k^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow k^2 \geq 4 \Leftrightarrow k \geq 2 \vee k \leq -2$$

– Nếu $k \geq 2 \Leftrightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2}$

$$\Rightarrow x = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{1 + 2k^2}}{k^2} + m2\pi, \ m \in Z$$

– Nếu $k \geq -2 \Leftrightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

$\Rightarrow x = \pm \arccos\left(-\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}\right) + n2\pi,\ n \in Z$

– Nếu $-2 < k < 2$: (1) vô nghiệm

Đề 78: Định mọi giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:
$\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = m \quad (1)$

Giải

• Điều kiện

$$\begin{cases} 1+2\cos x \geq 0 \\ 1+2\sin x \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \geq -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} (\text{mod } 2\pi) \\ m > 0 \end{cases}$$

Trong điều kiện $-\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} (\text{mod } 2\pi)$ có nghiệm nếu m là một giá trị của hàm: $y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}$

y giới nội do đó: $\min y \leq m \leq \max y$

vì $y \geq 0$ nên y và hàm $z = y^2$ đồng thời đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất $\Rightarrow \begin{cases} \min y = \sqrt{\min z} \\ \max y = \sqrt{\max z} \end{cases}$

Ta có:

$z = y^2 = 2 + 2(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{1 + 2(\cos x + \sin x) + 4\sin x \cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

vì $-\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} \leq x - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{2\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} \ (\text{mod } 2\pi)$

Đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right]$ là tập đối xứng và hàm cosin là hàm chẵn do đó

$\cos\frac{5\pi}{12} \le \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$ với $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \le \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Rightarrow \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \le \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \le t \le \sqrt{2}$

Ta có: $z = 2+2t+2\sqrt{1+2t+2t^2-2} = 2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}$

với $t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{2}\right] = D \Rightarrow z'_t = 2 + 2\frac{4t+2}{2\sqrt{2t^2+2t-1}}$

$= 2 + \frac{4t+2}{2\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0$, $\forall t \in D$

Suy ra z tăng trên đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} \min z = z\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sqrt{3}+1 \\ \max z = z(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}+1) \end{cases}$

Do đó ta có: $\begin{cases} \min y = \sqrt{\sqrt{3}+1} \\ \max y = 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \end{cases}$

Vậy giá trị m phải tìm là $\sqrt{\sqrt{3}+1} \le m \le 2\sqrt{\sqrt{2}+1}$

3. Dạng III

$\sqrt{f_1(x)} + \sqrt{f_2(x)} = \sqrt{g(x)}$

Điều kiện: $\begin{cases} f_1(x) \ge 0 \\ f_2(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$ (*)

với (*) ta bình phương 2 vế: $f_1(x) + f_2(x) + 2\sqrt{f_1(x)f_2(x)} = g(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{f_1(x)f_2(x)} = \frac{1}{2}[g(x) - f_1(x) - f_2(x)]$

trở lại dạng I: Cách giải tương tự dạng II